ZADANIA Z FIZYKI STATYSTYCZNEJ DUŻEJ DLA WSZYSKICH GRUP

1. Entropią rozkładu prawdopodobieństwa p_i nazywamy $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ [lub $-\int dx p(x) \ln p(x)$, dla rozkładów ciągłych]. Niech p_i będzie prawdopodobieństwem przyjmowania przez układ energii ε_i, a zbiór możliwych stanów energetycznych jest skończony. (i) Pokazać, że rozkład jednostajny $p_i = \text{const}$ maksymalizuje entropię. (ii) Pokazać, że rozkładem maksymalizującym entropię przy zadanej stałej wartości średniej energii jest rozkład Boltzmanna $p_i \propto e^{-\beta\varepsilon_i}$, gdzie β jest pewną stałą (wynikającą z warunku normalizacji). Wskazówka: Należy szukać ekstremum warunkowego S jako funkcji zmiennych p_i przy warunku $\sum_i p_i = 1$ oraz dodatkowo w przypadku (ii) $\sum_i p_i\varepsilon_i = \text{const}$. Użyć metody mnożników Lagrange'a (patrz, np., skrypt H. Arodzia i K. Rościszewskiego, str. 132).
2. Pokazać, że dla rozkładu (ii) z zad.1. $var(\varepsilon) \equiv \langle\varepsilon^2\rangle - \langle\varepsilon\rangle^2 = -d\langle\varepsilon\rangle/d\beta$.
3. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania "z ręki" karety i koloru przy grze talią 24 i 32 kart.
4. Rozwiązać zadania 1.12 i 1.13 z podręcznika K. Zalewskiego.
5. Rozwiązać zadania 5 i 6 ze zbioru zadań H. Arodzia i K. Rościszewskiego.
6. Obliczyć wartość średnią, wariancję i funkcję charakterystyczną dla rozładów: (i) Gaussa $p(x) \propto \exp[-(x-\mu)^2/4D]$; (ii) wykładniczego $p(x) \propto e^{-\beta x}$, $x \geq 0$; (iii) Poissona $p_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Literatura:

H. Arodź i K. Rościszewski, *Zbiór zadań z termodynamiki i fizyki statystycznej dla studiów zaocznych*, (UJ, 1978); *Fizyka statystyczna i termodynamika fenomenologiczna dla studiów zaocznych*, (UJ, 1980).

K. Zalewski, *Wykłady z mechaniki statystycznej i termodynamiki dla chemików*, (PWN, 1982).