ZADANIA Z FIZYKI STATYSTYCZNEJ DLA WSZYSTKICH GRUP

Definicja: *Prosesem stochastycznym (funkcją losową)* nazywąć będziemy rodzinę zmiennych losowych x_t, indeksowaną “czasem” $t \in R$, określoną przez (pełną) hierarchię *łączych rozkładów prawdopodobieństw* dla

$$x_{t_1},\, x_{t_2}, \ldots x_{t_n}; \qquad t_1 < t_2 < \ldots < t_n; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

to jest przez rodzinę $P_n(x_1, t_1; \ldots x_n, t_n)$ taką, że

$$\mathrm{Prob}(x_1 < x_{t_1} < x_1 + dx_1; \ldots x_n < x_{t_n} < x_n + dx_n) = P_n(x_1, t_1; \ldots x_n, t_n) dx_1 \ldots dx_n \,.$$

P_n są więc *gęstościami prawdopodobieństw* dla zdarzenia polegającego na “przejściu” *trajektorii (realizacji)* funkcji losowej w kolejnych chwilach przez zestaw “bramek” $x_i < x_{t_i} < x_i + dx_i$ i jako takie muszą spełniać następujące ogólne warunki
(i) nieujemności: $P_n \geq 0$
(ii) normalizacji: $\int P_n dx_1 \ldots dx_n = 1$
(iii) zgodności: $\int P_n dx_j = P_{n-1}(x_1, t_1; \ldots x_{j-1}, t_{j-1}; x_{j+1}, t_{j+1}; \ldots x_n, t_n)\,.$

Komentarz: Proces stochastyczny jest zatem wyznaczony przez podanie nieskończonego ciągu funkcji (łącznych rozkładów prawdopodobieństw) $\{P_n\}$, spełniających warunki (i)–(iii).

Zauważmy, że definicja funkcji losowej może być sformułowana w terminach *prawdopodobieństw warunkowych*

$$P(x_n, t_n; \ldots x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k; \ldots x_1, t_1) \equiv \frac{P_n(x_1, t_1; \ldots x_n, t_n)}{P_k(x_1, t_1; \ldots x_k, t_k)}$$

przejścia trajektorii procesu w chwilach $t_{k+1}, \ldots, t_n$ przez odpowiednie “bramki” umieszczone wokół $x_{k+1}, \ldots, x_n$ — trajektorii przyjmującej *uprzednio* wartości x_j w t_j; $j = 1, \ldots, k$.

Definicja: Proces stochastyczny, którego warunkowe (gęstości) prawdopodobieństwa spełniają następujący warunek

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \ldots x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

nazywany jest *procesem Markowa.*

Komentarz: Warunek ten stanowi, że o ile znana jest wartość procesu w chwili *obecnej* t_{n-1} to dla ustalenia jego zachowania *w przyszłości* nie jest potrzebna znajomość wartości przyjmowanych przezeń *w przeszłości.* W tym kontekście używane są określenia, że proces Markowa jest procesem “bez pamięci,” albo że jego zachowanie nie zależy od “historii.”

Zad. I1. Pokazać, że dla procesu Markowa pełna hierarchia łącznych prawdopodobieństw P_n może być skonstruowana z dwu funkcji: początkowego jednopunktowego rozkładu prawdopodobieństwa $P_1(x_1, t_1)$ i *prawdopodobieństwa przejścia* $P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$; tym samym proces Markowa jest kompletnie scharakteryzowany przez te dwie wielkości.

Zad. I2. Pokazać, że warunek zgodności (iii) implikuje następujące *równanie Chapmana–Kołmogorowa*

$$P(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1)\,, \qquad t_1 < t_2 < t_3\,,$$

będące tożsamością, którą *musi* spełniać prawdopodobieństwo przejścia dowolnego procesu Markowa. Pokazać, że *musi* także zachodzić:

$$P_1(x_2, t_2) = \int dx_1 P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P_1(x_1, t_1)\,.$$

Definicja. Proces stochastyczny jest *stacjonarny*, gdy wszystkie jego rozkłady nie ulegają zmianie wskutek przesuniecia punktu odniesienia na osi czasu, to jest jeżeli dla dowolnego n i ε

$$P_n(x_1, t_1 + \varepsilon; \ldots x_n, t_n + \varepsilon) = P_n(x_1, t_1; \ldots x_n, t_n)\,.$$

Zad. I3. Jakie ogólne własności funkcyjne musi spełniać $P_1(x, t)$ oraz prawdopodobieństwo przejścia $P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$, aby definiowany przez nie proces Markowa był stacjonarny.

Zad. I4. Gęstości prawdopodobieństw

$$P(x_2,t_2|x_1,t_1) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi(t_2-t_1)}}\exp\Big[-\frac{(x_2-x_1)^2}{4D(t_2-t_1)}\Big],$$

oraz $P_1(x,t) = P(x,t|0,0)$, $\big[$dla $t=0$, $P_1(x,0)=\delta(x)\big]$ spełniają warunki z zad. I2. Definiowany przez nie proces Markowa W_t nazywamy **procesem Wienera** (*ruchem Browna*). Pokazać, że autokowariancja tj. wartość średnia iloczynu wartości procesu w różnych chwilach t i s, dla procesu Wienera jest równa $\langle W_t W_s\rangle = 2D\min(t,s)$.

Zad. I5. Process Poissona jest dyskretnym (przyjmującym naturalne wartości) procesem Markowa o pradopodobieństwie przejścia

$$P(n+k,t|n,s) = \lambda^k(t-s)^k e^{-\lambda(t-s)}/k!\,,\quad t\geq s,\ k=0,1,2,\ldots$$

i $P_1(n,0)=\delta_{n,0}$. Sprawdzić, że spełnione jest równanie Chapmana-Kołmogorowa. Obliczyć $P_1(n,t)$.

Komentarz: Dokonując pewnej operacji analitycznej na procesie stochastycznym dostajemy (definiujemy) "nowy" proces stochastyczny. Jego niektóre własności możemy łatwo określić znając odpowiednie własności wyjściowego procesu. Mając proces x_t zdefiniujmy w szczególności dwa nowe procesy: $\xi_t = \frac{d}{dt}x_t$ oraz $X_t = \int_0^t ds f(s)x_s$. [$f$ jest dowolną funkcją (nielosową).] Dzięki temu, że operacje liniowe – różniczkowanie, całkowanie i uśrednianie – są przemienne kowariancje "nowych" procesów wyrażają się przez kowariancję procesu x_t następujacymi wzorami:

$$\langle \xi_{t_1}\xi_{t_2}\ldots\xi_{t_n}\rangle = \frac{\partial^n}{\partial t_1\ldots\partial t_n}C(t_1,\ldots,t_n),$$

$$\langle X_{t_1}X_{t_2}\ldots X_{t_n}\rangle = \int_0^{t_1}dz_1\int_0^{t_2}dz_2\ldots\int_0^{t_n}dz_n f(z_1)f(z_2)\ldots f(z_n)C(z_1,\ldots,z_n),$$

gdzie $C(u_1,\ldots,u_n) = \langle x_{u_1}\ldots x_{u_n}\rangle$.

Zad. I6. Niech $\xi_t = \frac{d}{dt}W_t$, gdzie W_t jest procesem Wienera określonym w poprzednim zestawie zadań. Pokazać, że $\langle\xi_t\rangle = 0$, $\langle\xi_t\xi_s\rangle = 2D\delta(t-s)$. [Wskazówka: $\min(t,s) = t\Theta(s-t)+s\Theta(t-s)$.] Proces ξ_t będący pochodną procesu Wienera nazywany jest *białym szumem gaussowskim*.

Zad I7. Obliczyć wartość oczekiwaną $\langle X_t\rangle$ i autokowariancję $\langle X_tX_s\rangle$ gaussowskiego procesu X_t będącego rozwiązaniem liniowego równania różniczkowego

$$m\frac{dX_t}{dt} = -\gamma X_t + \xi_t\,,$$

przy warunku początkowym $X_{t_0} = x_0$, gdzie ξ_t jest białym szumem gaussowskim, $\gamma > 0$. Przeanalizować granicę $t_0\to-\infty$ [w wyniku której dostajemy proces stacjonarny (równowagowy)]. X_t jest prędkością cząstki Browna o masie m, systematyczna część siły ma postać tarcia wiskotycznego o współczynniku γ (prawo Stokesa), siła przypadkowa Langevina jest białym szumem gaussowskim. Na podstawie stacjonarnej wartości średniej i wariancji zidentyfikować równowagowy rozkład prawdopodobieństwa X. Porównując z rozkładem Maxwella-Boltzmanna $\exp[-mX^2/2kT]$ otrzymać relację Einsteina $D=\gamma kT$ (twierdzenie fluktuacyjno–dyssypacyjne).

Zad. I8. Przeanalizować zadania 13–15 ze zbioru zadań H. Arodzia i K. Rościszewskiego w celu zauważenia związku pomiędzy procesem dychotomicznym i procesem Poissona oraz dyskretnego modelu błądzenia przypadkowego z procesem Wienera.