

Co to jest algorytm?

***Algorytm**, przepis postępowania prowadzący do rozwiązania ustalonego problemu, określający ciąg czynności elementarnych, które należy w tym celu wykonać.*

[<http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/algorytm;3867807.html>]

Algorytm – skończony ciąg jasno zdefiniowanych czynności, koniecznych do wykonania pewnego rodzaju zadań. Sposób postępowania prowadzący do rozwiązania problemu.

[<https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Algorytm>]

>> **A czy może istnieć *algorytm nieskończony*?** <<

Po co stworzono komputery, czyli od *Logicyzmu* do *Maszyny Turinga* ...



Münchhausen

O. Herrfurth pin.x

Komputery służą realizacji algorytmów, zaś algorytmy wymyślono, aby programować komputery ...

Logicyzm (*inaczej: empiryzm logiczny*) – program redukcji całej matematyki do logiki, sformułowany na przełomie XIX i XX w.

W pierwszej fazie: postulował sprowadzenie twierdzeń z tzw. „wyższych” działów matematyki do twierdzeń dot. arytmetyki liczb naturalnych ([Bertrand Russell](#), [Georg Cantor](#), [Ernest Zermelo](#))

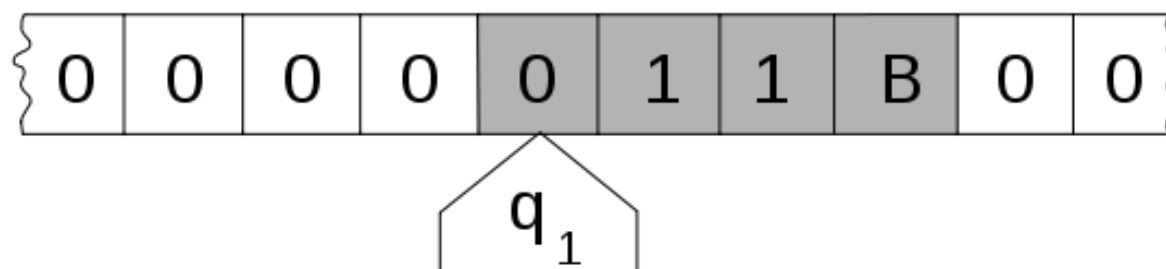
Następnie (lub *równolegle*) – planowano wykazać, że twierdzenia arytmetyki wynikają, po odpowiednim zdefiniowaniu pojęć, wprost z praw logiki (tzw. program *sformalizowania logiki* matematycznej sformułowany przez **Dawida Hilberta**).

Twierdzenie Gödela (1931) – *w ramach każdej teorii matematycznej (zawierającej pojęcie liczb naturalnych) istnieje zdanie, którego nie da się ani udowodnić, ani obalić.*

[**Umowny koniec programu *sformalizowania* matematyki ...**]

Alan Turing (1936) — W pracy: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, wprowadza pojęcie abstrakcyjnej maszyny (**maszyna Turinga**) oraz liczby obliczalnej, tj. liczby będącej wynikiem (na ogół: *nieskończonego*) ciągu operacji maszyny, wykonywanych wg skończonego zestawu instrukcji (dzisiaj powiedzielibyśmy: **programu**).

Prawie wszystkie l.rzeczywiste to tzw. liczby nieobliczalne ...



Maszyna Turinga w stanie q_1 nad zerem na taśmie; zob: pl.wikipedia.org

Formalnie, **maszynę Turinga** definiuje odwzorowanie jednoznaczne:

$$\delta: \Gamma \times Q \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ L, P, - \}$$

gdzie:

Q — zbiór możliwych stanów maszyny (*skończony!*)

Γ — zbiór dopuszczalnych symboli na taśmie (*skończony!*)

$\{ L, P, - \}$ — przesunięcie głowicy (*lewo, prawo, bez przesunięcia*)

[***Komputer to maszyna ... ale nie Turinga!***]

=> *Ograniczenia maszyn Turinga (jak np. tzw. „**problem stopu**”)
tym bardziej dotyczą realnych komputerów (!)*

Przykładowy algorytm (*skończony ...*)

ZADANIE: Oblicz $n!$ dla danego n wg wzoru:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

[Rozwiązanie: *wymnażamy od końca ($n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2$).*]

1. Zapamiętaj n . (**Zakładam: $n > 1$**)
2. Zmniejsz n o 1.
3. Sprawdź, czy $n == 1$? Jeśli TAK -> **Koniec**.
Jeśli NIE:
4. Pomnóż zapamiętaną liczbę przez n .
5. Idź do kroku 2.

Program obliczający $n!$ (Wersja 1)

(*A zarazem przykład, jak nie należy programować ...*)

```
main()
{
    int w, n;
    scanf("%d", &n);
    w = n;
krok2:
    n -= 1;    /*  n = n - 1;  */
    if (n == 1) goto koniec;
    w *= n;    /*  w = w*n;  */
    goto krok2;
koniec:
    printf("%d\n", w);
}
```

Program obliczający $n!$ (Wersja 2: *tym razem jak należy!*)

```
int main()
{
    int w, n;
    scanf("%d", &n);
    w = n;
    while (n > 2) {
        n--;    /* n = n-1; nieco krócej ... */
        w *= n; /* w = w*n; */
    }
    printf("%d\n", w);
    return 0;
}
```

[**Inne możliwe zapisy pętli:** `while (n > 2) w *= --n;`
 lub np.: `while (n-- > 2) w *= n;`]

Instrukcja *goto*

Instrukcja skoku (`goto etykieta;`) na ogół powoduje zauważalny wzrost długości kodu binarnego; **prawie zawsze** pogarsza czytelność programu i utrudnia wprowadzanie zmian.

Tam, gdzie to możliwe – *należy jej unikać!*

Na przykład, do niestandardowego opuszczenia bloku pętli doskonale nadaje się instrukcja (*strukturalna!*) `break;`

[*Na ogół w formie: `if (warunek) break;`].*

A co jeśli chcę *opuszczyć dwie pętle naraz?*

Przykład - opuszczanie 2 pętli z *goto*:

Sprawdamy, czy w tablicach **a** i **b** występuje taki sam element:

```
for (i=0; i<n; i++) {
    for (j=0; j<m; j++) {
        if (a[i] == b[j])
            goto found; /* element znaleziony */
    }
}
/* Instrukcje, gdy nie ma elementu */
...
found: /* znaleziono a[i]==b[j] */
; /* Po etykiecie - zawsze instrukcja! */
```

Program zawierający instrukcje skoku (`goto`) **ZAWSZE** można napisać bez niej, zwykle kosztem kilku dodatkowych instrukcji; w tym przypadku możemy np. *zastąpić 2 pętle jedną*:

```
found=0;
for (ix = 0; ix < n*m; ix++) {
    j = ix%m;
    i = (ix-j)/m;
    /* A można też:  i = (ix-(j=ix%m))/m;  :-0 */
    if (a[i] == b[j]) {
        found = 1;
        break;
    }
}
if (!found) { /* Instrukcje, gdy nie ma elementu */ }
else { /* znaleziono a[i]==b[j] */ }
```

Program można jeszcze nieco skrócić zapisując pętlę tak:

```
for (found=0, ix=0; ix<n*m && !found; ix++) {  
    ...  
    if (a[i]==b[j])  
        found=1;  
}
```

Nie nie potrzeba wówczas `break` w warunku: `if (a[i]==b[j])`.
[Frazy "`&& !found`" można też użyć w 2 pętlach, tj. dla `i` oraz `j`]

Kernighan & Ritchie, 1988:

*„Nie jesteśmy w tej sprawie dogmatyczni, wydaje się jednak, że jeśli instrukcja `goto` ma być w ogóle stosowana, to powinna być stosowana **rzadko**.”*

[*Na pocieszenie — w C mamy **wskaźniki na funkcje ...***]

Algorytmy nieskończone (1)

Dwa problemy do samodzielnego przemyślenia:

(a) Oblicz liczbę π wg wzoru Wallisa (1655)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

(b) Oblicz liczbę e (tj. podstawę logarytmu naturalnego)

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

W obu przypadkach, możliwe jest stworzenie algorytmu, którego wynik różni się od dokładnego o dowolnie małe $\varepsilon > 0$.

Po ***nieskończenie długim czasie*** otrzymamy zatem **wynik dokładny** (!)

[**nieskończoność potencjalna** | **nieskończoność aktualna**]

Algorytmy nieskończone (2)

PROSTY problem do samodzielnego rozwiązania:

Oblicz wartość numeryczną $\sqrt{2}$ korzystając z działań elementarnych $+$, $-$, $*$, $/$

Wskazówka: Zdefiniuj pomocniczo funkcję $y = x^2 - 2$ i poszukaj jej miejsca zerowego w przedziale $x \in [0,2]$ stosując np. **algorytm równego podziału (bisekcji)** [lub *metodę Newtona*].

Obliczenia należy prowadzić do momentu, gdy poprawa przybliżenia nie będzie już możliwa w ramach arytmetyki ustalonej precyzji (**float**, **double**, **long double**)

Algorytmy probabilistyczne

W sytuacji, gdy nie znamy *deterministycznego* przepisu na obliczenie interesującej nas wielkości (X) niekiedy można pokazać, że istnieje **proces losowy** (np. przebiegający wg schematu *prób Bernoulliego*), dla którego X (zakładamy, że $0 < X < 1$) jest **prawdopodobieństwem sukcesu**.

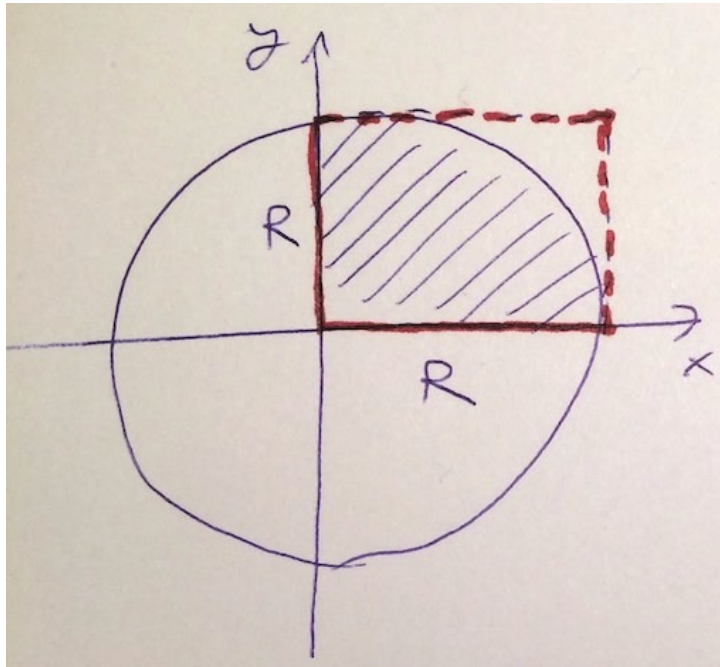
Wówczas — co prawda nie potrafimy X obliczyć — możemy jednak zaprząć komputer do symulacji, podczas której średnia częstość występowania interesującego nas zdarzenia będzie równa X .

[=> **Metody Monte-Carlo, generacja liczb pseudolosowych**]

Czas obliczeń: $T \sim \log(1/\varepsilon)$ dla aa. deterministycznych,

$T \sim 1/\varepsilon^2$ dla metod Monte-Carlo.

Przykład: Obliczanie π metodą Monte-Carlo



Mamy:

$$\frac{\text{Pole } 1/4 \text{ koła}}{\text{Pole kwadratu}} = \frac{\frac{1}{4} \pi R^2}{R^2} = \frac{\pi}{4}$$

⇒ Zarazem, $\pi/4$ to prawdopodobieństwo, że dla **losowo wybranych** x i y [zakładam: $0 \leq x < R$, oraz $0 \leq y < R$]

punkt o współrzędnych (x,y) leży wewnątrz okręgu.

A czy można obliczyć e metodą Monte Carlo?

>> **MOŻNA!** <<

Permutacje bez punktu stałego („problem sekretarki”).

P-stwo, że losowo wybrana (spośród $n!$ permutacji zbioru n elementów) *nie pozostawia żadnego elementu na swoim miejscu*:

$$P_0(n) = 1 + \frac{-1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

W granicy $n \rightarrow \infty$ dostajemy: $P_0 \rightarrow e^{-1} = 1/e \approx 0.3679$.

Ćwiczenie: Napisz program, który generuje losową, reprezentatywną próbę np. 10^6 spośród $100!$ permutacji 100 elementów, i sprawdza, jaki jest udział (w tej próbie) permutacji bez punktu stałego.

Wskazówka: Każdą permutację można otrzymać dokonując skończonej liczby transpozycji sąsiednich elementów permutacji identycznościowej.

Poprzedni wykład:

- Stałe i *wyrażenia stałe* w języku C
- Deklaracje/definicje (=> zasięg zmiennych, zmienne zewnętrzne i *zmienne automatyczne*)
- Operatory arytmetyczne; relacje i operatory logiczne
- Interpretacja logiczna liczb całkowitych
- *Przekształcenia typów*

Przekształcenia typów

Jeśli argumenty operatora są różnych typów, dokonuje się przekształcenia typu „ciaśniejszego” do „obszerniejszego”.

[*Zawsze w ramach **jednego** wyrażenie składowego !!!
=> wyrażenie: $1/3*x == 0.0$ dla x typu **double**]*

Praktyczny zestaw reguł (nie dotyczy **unsigned ...**):

- Jeśli którykolwiek z argumentów jest typu **long double**, drugi zostanie przekształcony do **long double**.
- W przeciwnym przypadku, jeśli typem któregośkolwiek argumentu jest **double**, to drugi argument będzie przekształcony do **double**.

- W przeciwnym przypadku, jeśli typem któregośkolwiek z argumentów jest `float`, to drugi argument będzie przekształcony do `float`.
- W przeciwnym przypadku, obiekty typu `char` i `short` są przekształcane do `int`.
- Ostatecznie, jeśli którykolwiek z argumentów ma kwalifikator `long`, to drugi zostanie przekształcony do `long`.

Reguły przekształceń **komplikuja się** dla argumentów `unsigned`.

Odpowiedź na pytanie, który z dwóch typów (`unsigned` i coś ze *znakiem*) jest *ciaśniejszy*, a który *obszerniejszy*, może zależeć od maszyny. Jeśli `int` ma 16 bitów a `long` — 32, wówczas $-1L < 1U$ (a jednocześnie $-1L > 1UL$); jeśli oba mają 32 bity: $-1L > 1U$.

Rzutowanie

Aby **wymusić przekształcenie** typu (*w pożądanym kierunku!*), używamy operatora rzutowania (ang. *cast*), np.

```
sqrt((double)n), albo (float)i/n.
```

Podobnie, możliwe jest rzutowanie typu *obszerniejszego* na *ciaśniejszy*, np. `(int)x` dla zmiennej typu `float` (lub `double`).

W takim przypadku, wynik jest *obcinany* (do l.całkowitej *mniejszej lub równej* x) jedynie dla x – **nieujemnego**; dla ujemnego – „obcięcie w górę”; nie jest to zatem *matematycznie* „część całkowita x”.

```
[ Istnieją funkcje biblioteczne: double floor(double x);  
double ceil(double x); zdefiniowane w <math.h> ]
```

Ważne: *Rzut produkuje wartość argumentu w odpowiednim typie; sam argument pozostaje niezmienny.*

Operatory zwiększania i zmniejszania

W C mamy specyficzne dla tego języka, jednoargumentowe operatory *zwiększania* i *zmniejszania* wartości zmiennych:

Operator **++** **dodaje 1** do swojego argumentu;
operator **--** **odejmuje 1**.

Każdy z nich może występować w wersji przedrostkowej (**++n**) lub przyrostkowej: **n++**. [Podobnie, mamy: **--n** lub **n--**]

[*W pierwszym przypadku, wyrażenie ++n zwiększa wartość n **przed** jej użyciem; zaś n++ zwiększa n **po** użyciu poprzedniej wartości.*]

Jeśli np. **n == 5**; instrukcja:

```
x=n++;
```

nadaje zmiennej x wartość 5, zaś n — wartość 6, natomiast instrukcja:

```
x=++n;
```

nadaje obu zmiennym, tj. x i n, wartość 6.

Operatory bitowe

W C mamy sześć operatorów pozwalających na manipulacje bitami, 5 dwuargumentowych i 1 jednoargumentowy; można je stosować jedynie do argumentów całkowitych, tj. typów

`char`, `short`, `int`, lub `long`,

zarówno w wersjach ze znakiem jak i bez znaku. Są to:

- `&` bitowa koniunkcja (AND),
- `|` bitowa alternatywa (OR),
- `^` bitowa *różnica symetryczna* (ang. exclusive-or, XOR),
- `<<` przesunięcie w lewo,
- `>>` przesunięcie w prawo,
- `~` dopełnienie bitowe (*operator 1-argumentowy*).

Bitowy **operator koniunkcji** (&) służy do „zastaniania” (zerowania) wybranego zbioru bitów; z kolei operator alternatywy (|) służy do „ustawiania” (zastępowania jedynkami) wybranych bitów.

Przykładowo, instrukcja

```
x = x & ~077;          /* lub: x &= ~077; */
```

spowoduje wyzerowanie sześciu ostatnich bitów x

[*A wynik zupełnie nie zależy od tego, ile bitów ma x!*].

Np, dla 8 bitów (`unsigned char`) stała `077` (dziesiątkowo: `63`) reprezentowana jest przez ciąg: `00111111` zaś `~077` to `11000000`; w przypadku *obszerniejszych* typów przybywa jedynek z przodu.

Spostrzeżenie: Instrukcja `x ^= MASKA;` **jest odwracalna**, tzn. jeśli wykonać ją powtórnie — zmienna x odzyska początkową wartość.

Operatory i wyrażenia przypisania

Wyrażania podobne do: `i = i + 2`

można zastępować krótszymi: `i += 2`

[Np. `x *= y + 1` jest odpowiednikiem: `x = x * (y + 1)`]

W C istnieją zatem tzw. **operatory przypisania**:

`+=` `--` `*=` `/=` `%=` `<<=` `>>=` `&=` `^=` `|=`

Funkcja **zliczająca bitowe jedynki** argumentu x:

```
int bitcount(unsigned x) /* NIE MA bitu znaku! */
{
    int b;
    for (b = 0; x != 0; x >>= 1)
        if (x & 01u) b++;
    return b;
}
```

Wyrażenia warunkowe (czyli operator "?:")

Instrukcja:

```
if (a > b) z = a;  
else z = b;
```

może zostać zastąpiona przez:

```
z = (a > b) ? a : b; /* Nawiasy () można pominąć */
```

[**Operator „?:” to JEDYNY trójargumentowy operator w C !**]

Po prawej stronie przypisania mamy **wyrażenie warunkowe**

[TUTAJ: `(a > b) ? a : b`], które jest pełnoprawnym wyrażeniem, ma zatem swoją *wartość* i może zostać użyte wszędzie tam, gdzie inne wyrażenia. **Przykład:**

```
printf("Mamy %d część%s.\n", n, n==1 ? "ć" : "ci");
```

UWAGI o wyrażeniu warunkowym „?:”

Operator `?:` wiąże **silniej** niż przypisanie (`=`), czy operator przecinkowy (`,`) ale **słabiej** niż np. operatory relacji (`<`, `>`, `==`).

Przykładowo, w warunku zakończenia pętli:

```
for (x = 0.0; x < (y>1.0 ? y : 1.0); x += 0.1)
```

nie można pominąć nawiasów „ () ”, w przeciwnym wypadku wyrażenie ulegnie „rozerwaniu” przez pierwszy „<”.

Jest to szczególnie istotne w **makrodefinicjach** zawierających „?:”

```
#define MAX(a,b) (((a)>(b))?(a):(b))
```

```
#define ROUND(x) ((x)>=0?(int)((x)+0.5):(int)((x)-0.5))
```