

Czasopodobne geodezyjne w czasoprzestrzeni Schwarzschilda

Ogólne rozwiązanie równań ruchu

Adam Cieřlik i Patryk Mach

Stan wiedzy

- 1916 K. Schwarzschild - jako pierwszy uzyskał próżniowe rozwiązanie równań Einsteina.
- 1917 J. Droste - niezależnie otrzymał to samo rozwiązanie jak Schwarzschild. Dodatkowo rozwiązał równania ruchu cząstki próbnej używając funkcji eliptycznych Weierstrassa.
- 1930 Y. Hagihara - podał pełen opis ruchu cząstek próbnych bazując na pracy Droste'a.
- 1959-62 C. Darwin, J. Plebański, B. Mielnik - opisali ruch cząstek przy użyciu funkcji eliptycznych Jacobiego i Legendre'a.
- 2011 G. Scharf - opis ruchu przy użyciu uproszczonego twierdzenia Biermanna Weierstrassa.
- 2014 U. Kostić - zgrabny opis zagadnienia przy użyciu potencjału i funkcji specjalnych.



Metryka

Pracujemy w sferycznym układzie współrzędnych (t, r, θ, φ) . Metrykę Schwarzschilda możemy zapisać następująco

$$g = -Nd\bar{t}^2 + \frac{d\bar{r}^2}{N} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

gdzie

$$N = 1 - \frac{r_s}{\bar{r}},$$

oraz $r_s = 2M$ jest promieniem Schwarzschilda.

By uniknąć nieregularności na horyzoncie, wybieramy nową foliację czasową

$$t = \bar{t} + \int^{\bar{r}} \left[\frac{1}{N(s)} - \eta(s) \right] ds, \quad r = \bar{r},$$

gdzie $\eta = \eta(\bar{r})$ jest funkcją promienia \bar{r} . W skutek podstawienia dostajemy metrykę w nowej formie

$$g = -Ndt^2 + 2(1 - N\eta)dtdr + \eta(2 - N\eta)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1)$$

Wielkości zachowane

Hamiltonian H pojedynczej cząstki poruszającej się wzdłuż geodezyjnej możemy zapisać następująco

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x^\alpha) p_\mu p_\nu.$$

Gdzie (x^μ, p_μ) traktujemy jako współrzędne kanoniczne, H zależy od x^α poprzez $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$. Łatwo sprawdzić, że równania Hamiltona

$$\frac{dx^\mu}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{d\tilde{s}} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad (2)$$

prowadzą do równania geodezyjnych

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tilde{s}^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{s}} = 0.$$

Wybraliśmy tutaj parametr \tilde{s} jako przeskalowany czas własny $\tilde{s} = \tilde{\tau}/m$, gdzie m to masa spoczynkowa cząstki.



Czteroprędkość $u^\mu = dx^\mu/d\tilde{\tau}$ jest znormalizowana poprzez warunek $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$. Przyjmujemy $p^\mu = dx^\mu/d\tilde{s}$, dzięki czemu dostajemy $H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = -\frac{1}{2}m^2$.

Dla metryki (1) Hamiltonian przybiera poniższą postać

$$H = \frac{1}{2} \left[g^{tt}(r)p_t^2 + 2g^{tr}(r)p_t p_r + g^{rr}(r)p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right].$$

Ponieważ H nie zależy od t i φ , to współrzędna czasowa i azymutalna pędu są zachowane, innymi słowy $E \equiv -p_t$ (energia) oraz $l_z \equiv p_\varphi$ (kręt azymutalny). Hamiltonian jest również niezależny od \tilde{s} , dzięki czemu jest również wielkością zachowaną. Prostymi obliczeniami można sprawdzić, że kolejną zachowaną wielkością jest całkowity moment pędu

$$l = \sqrt{p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (3)$$

Równania ruchu

Dzięki równiań Hamiltona (2), możemy zapisać teraz równania ruchu cząstki

$$\frac{dr}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \epsilon_r \sqrt{E^2 - \tilde{U}_{l,m}(r)}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{l_z}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (4b)$$

$$\frac{d\theta}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{\epsilon_\theta}{r^2} \sqrt{l^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (4c)$$

$$\frac{dt}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial p_t} = \frac{E}{N} + \epsilon_r \frac{1 - N\eta}{N} \sqrt{E^2 - \tilde{U}_{l,m}(r)}, \quad (4d)$$

gdzie

$$\tilde{U}_{l,m}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(m^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)$$

jest potencjałem efektywnym, a $\epsilon_\theta = \pm 1$ oraz $\epsilon_r = \pm 1$ odpowiadają za kierunek ruchu.

Nowy układ współrzędnych

Wygodnie jest pracować z równaniami ruchu, które zależą w jak najmniejszym stopniu od różnych zmiennych. Możemy wprowadzić to uproszczenie do równań (4b) i (4c). Wystarczy przeprowadzić reparametryzację geodezyjnych w następujący sposób

$$\frac{dx^\mu}{d\bar{s}} = r^2 \frac{dx^\mu}{d\tilde{s}}$$

lub

$$\tilde{s} = \int_0^{\bar{s}} r^2 ds.$$

Warto również wprowadzić bezwymiarowe zmienne

$$t = M\tau, r = M\xi, p_r = m\pi_\xi, p_\theta = Mm\pi_\theta, E = m\varepsilon, l = Mm\lambda, l_z = Mm\lambda_z.$$

W takim układzie parametr afiniczny definiujemy następująco

$$\tilde{s} = \frac{M}{m} s.$$

Po wprowadzeniu zmian, równania ruchu (4) przybierają postać

$$\frac{d\xi}{ds} = \epsilon_r \xi^2 \sqrt{\epsilon^2 - U_\lambda(\xi)}, \quad (5a)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\lambda_z}{\sin^2 \theta}, \quad (5b)$$

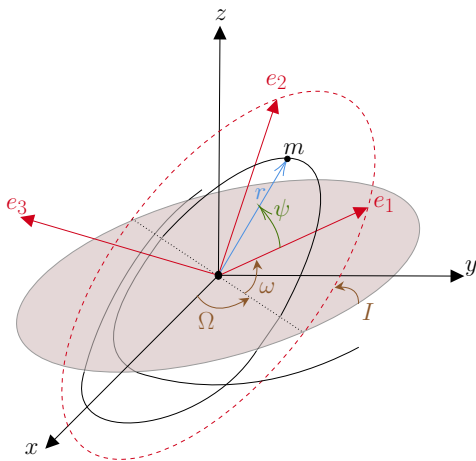
$$\frac{d\theta}{ds} = \epsilon_\theta \sqrt{\lambda^2 - \frac{\lambda_z^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (5c)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\epsilon \xi^2}{N(\xi)} + \epsilon_r \frac{(1 - N(\xi)\eta(\xi)) \xi^2}{N(\xi)} \sqrt{\epsilon^2 - U_\lambda(\xi)}, \quad (5d)$$

gdzie $N(\xi) = 1 - 2/\xi$, a bezwymiarowy potencjał efektywny

$$U_\lambda(\xi) = \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \left(1 + \frac{\lambda^2}{\xi^2}\right) = 1 - \frac{2}{\xi} + \frac{\lambda^2}{\xi^2} - \frac{2\lambda^2}{\xi^3}.$$

Ponieważ metryka, w której pracujemy jest sferycznie symetryczna, to zawsze możemy znaleźć płaszczyznę w której cząstka się porusza.



Opis kątowy możemy uzależnić od anomalii prawdziwej ψ . W tym celu należy zauważyć, poniższą zależność między inklinacją a zachowanymi krętami

$$\cos I = \frac{\lambda_z}{\lambda}. \quad (6)$$

Po wykonaniu stosownych obliczeń można przedstawić zależność między ψ a φ, θ

$$\begin{aligned} \cos I d\psi &= \frac{\lambda_z}{\lambda} d\psi = \sin^2 \theta d\varphi, \\ \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - \frac{\lambda_z^2}{\sin^2 \theta}} d\psi &= \epsilon_\theta d\theta. \end{aligned}$$

W skutek tych dwóch relacji różniczkowych, oba równania (5b) i (5c) mogą zostać zastąpione przez $d\psi/ds = \lambda/\xi^2$. To znaczy, że możemy zapisać równania ruchu (5) w nowej formie

$$\frac{d\xi}{ds} = \epsilon_r \sqrt{\epsilon^2 - U_\lambda(\xi)}, \quad (7a)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\lambda}{\xi^2}, \quad (7b)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\epsilon}{N(\xi)} + \epsilon_r \frac{1 - N(\xi)\eta(\xi)}{N(\xi)} \sqrt{\epsilon^2 - U_\lambda(\xi)}. \quad (7c)$$

Powyższy układ równani opisuje ruch masywnych cząstek próbnych po swoich geodezyjnych w czterowymiarowej czasoprzestrzeni Schwarzschilda.

Rozwiązanie równań ruchu

Analizując równia (7), można dojść do wniosku, że warto potraktować ψ jako parametr i szukać rozwiązania w formie $\xi = \xi(\psi)$. Z równań (7a) i (7b) dostajemy

$$\frac{d\xi}{d\psi} = \epsilon_r \frac{\xi^2}{\lambda} \sqrt{\epsilon^2 - U_\lambda(\xi)} = \epsilon_r \sqrt{\frac{\epsilon^2 - 1}{\lambda^2} \xi^4 + \frac{\xi_s}{\lambda^2} \xi^3 - \xi^2 + \xi_s \xi}. \quad (8)$$

Zdefiniujmy

$$f(\xi) = a_0 \xi^4 + 4a_1 \xi^3 + 6a_2 \xi^2 + 4a_3 \xi + a_4, \quad (9)$$

gdzie

$$a_0 = \frac{\epsilon^2 - 1}{\lambda^2}, \quad 4a_1 = \frac{\xi_s}{\lambda^2}, \quad 6a_2 = -1, \quad 4a_3 = \xi_s, \quad a_4 = 0, \quad (10)$$

dzięki temu możemy zapisać równanie (8) następująco

$$\frac{d\xi}{d\psi} = \epsilon_r \sqrt{f(\xi)}. \quad (11)$$

Dla części trajektorii, dla której ϵ_r jest stałe, dostajemy

$$\psi = \epsilon_r \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\sqrt{f(\xi')}}, \quad (12)$$

gdzie ξ_0 jest dowolnie wybranym promieniem odpowiadającym kątowi $\psi = 0$.

Funkcja eliptyczna Weierstrassa \wp

Def.1 Funkcje dwuokresowe

Funkcje, które spełniają równanie

$$f(z + 2\omega_1) = f(z), \quad f(z + 2\omega_2) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

gdzie $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$.

Def.2 Funkcje eliptyczne

Funkcje dwuokresowe, które są analityczne i które nie mają innych osobliwości niż bieguny w skończonej części płaszczyzny.

Def.3 Funkcja eliptyczna Weierstrassa

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left(\frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right),$$

gdzie prim oznacza, że elementy sumy z mianownikiem równym zero są pomijane.

Twierdzenie Biermanna-Weierstrassa

Niech

$$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4, \quad (13)$$

będzie wielomianem czwartego stopnia, i niech jego niezmienniki będą

$$g_2 \equiv a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \quad (14a)$$

$$g_3 \equiv a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4. \quad (14b)$$

Niech

$$z(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{f(x')}}, \quad (15)$$

gdzie x_0 jest dowolną stałą, nie koniecznie zerem $f(x)$.



Wtedy

$$x = x_0 + \frac{-\sqrt{f(x_0)}\wp'(z) + \frac{1}{2}f'(x_0)\left(\wp(z) - \frac{1}{24}f''(x_0)\right) + \frac{1}{24}f(x_0)f'''(x_0)}{2\left(\wp(z) - \frac{1}{24}f''(x_0)\right)^2 - \frac{1}{48}f(x_0)f^{(4)}(x_0)}, \quad (16)$$

oraz

$$\wp(z) = \frac{\sqrt{f(x)f(x_0)} + f(x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{f'(x_0)}{4(x-x_0)} + \frac{f''(x_0)}{24}, \quad (17a)$$

$$\wp'(z) = -\left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{f'(x)}{4(x-x_0)^2}\right]\sqrt{f(x_0)} - \left[\frac{f(x_0)}{(x-x_0)^3} + \frac{f'(x_0)}{4(x-x_0)^2}\right]\sqrt{f(x_0)} \quad (17b)$$

gdzie $\wp(z) = \wp(z; g_2, g_3)$ jest funkcją Weierstrassa z niezmiennikami g_2 i g_3 .



Zastosowanie twierdzenia

Dzięki twierdzeniu Biermanna-Weierstrassa, możemy zapisać rozwiązanie równania ruchu (8) w następujący sposób

$$\xi(\psi) = \xi_0 + \frac{-\epsilon_r \sqrt{f(\xi_0)} \wp'(\psi) + \frac{1}{2} f'(\xi_0) [\wp(\psi) - \frac{1}{24} f''(\xi_0)] + \frac{1}{24} f(\xi_0) f'''(\xi_0)}{2 [\wp(\psi) - \frac{1}{24} f''(\xi_0)]^2 - \frac{1}{48} f(\xi_0) f^{(4)}(\xi_0)}. \quad (18)$$

Niezmienniki funkcji \wp mają postać

$$g_2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \frac{\xi_s^2}{\lambda^2}, \quad g_3 = \frac{1}{6^3} - \frac{1}{48} \frac{\xi_s^2}{\lambda^2} - \frac{1}{16} \frac{(\epsilon^2 - 1)}{\lambda^2} \xi_s^2, \quad (19)$$

a f jest zdefiniowana jak w równaniu (11).

Powyższe równanie jest ogólnym rozwiązaniem równania (8) i jest poprawne dla wszystkich typów dozwolonych trajektorii, niezależnie od znaku ϵ_r . Można to sprawdzić numerycznie oraz dowieść analitycznie.

Przybliżenie post-Newtonowskie

Jako pierwszy test naszego rozwiązania możemy rozważyć granicę post-Newtonowską. Najwygodniejszym do tego sposobem jest odniesienie się do pery/apocentrum, czyli pkt. dla którego $f(\xi_1) = 0$. Wtedy równanie (18) przybiera postać

$$\xi(\psi) = \xi_1 + \frac{f'(\xi_1)}{4 \left[\wp(\psi) - \frac{1}{24} f''(\xi_1) \right]}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla granicy post-Newtonowskiej niezmienniki $g_2 \rightarrow \frac{1}{12}$, $g_3 \rightarrow \frac{1}{6^3}$. Dla tych wartości \wp ma postać

$$\wp(\psi, 12^{-1}, 6^{-3}) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2(1 - \cos \psi)}.$$

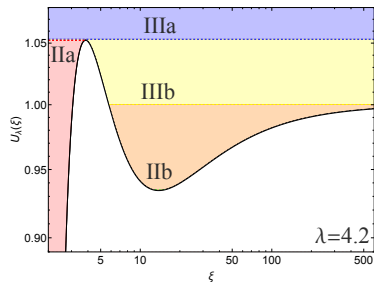
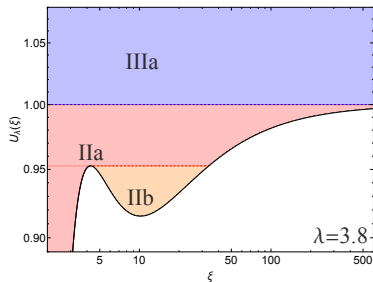
Dodatkowo przedstawmy jeszcze mimośród e

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1 - e}{1 + e},$$

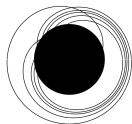
gdzie $f(\xi_2) = 0$. Używając powyższych elementów, łatwo pokazać, że

$$\xi(\psi) = \frac{(1 + e)\xi_1}{1 + e \cos \psi}.$$

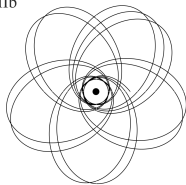
Właściwości potencjału efektywnego



IIa



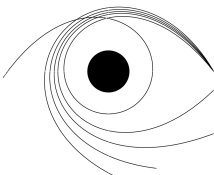
IIb



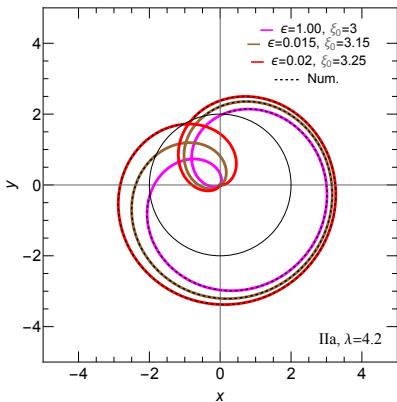
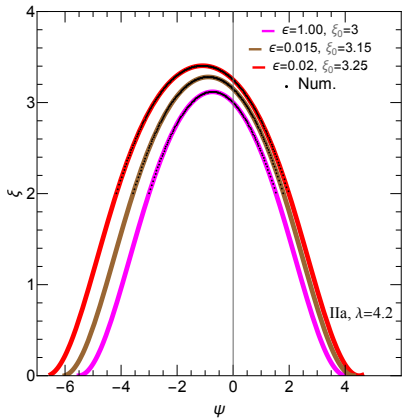
IIIa



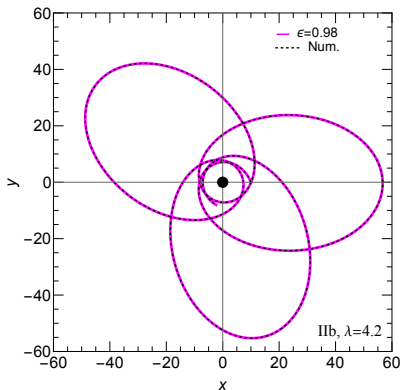
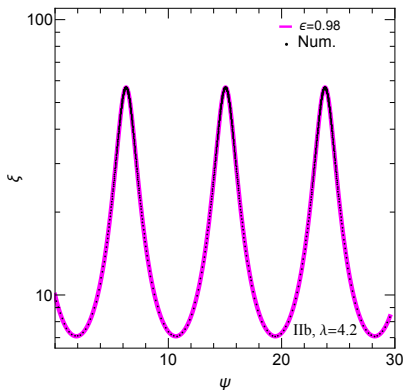
IIIb



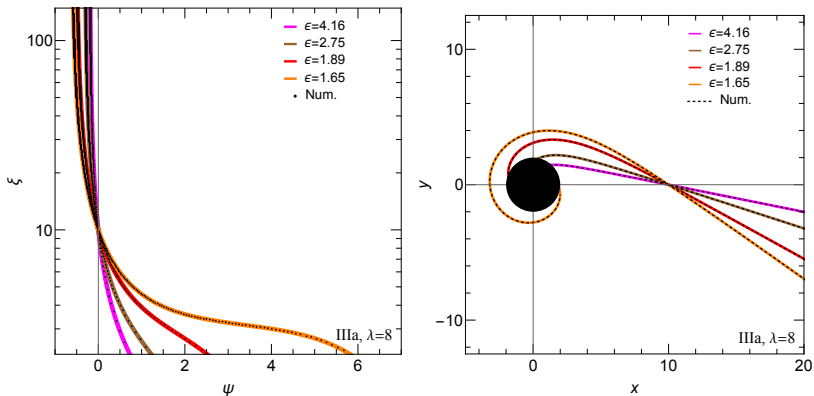
Testy numeryczne



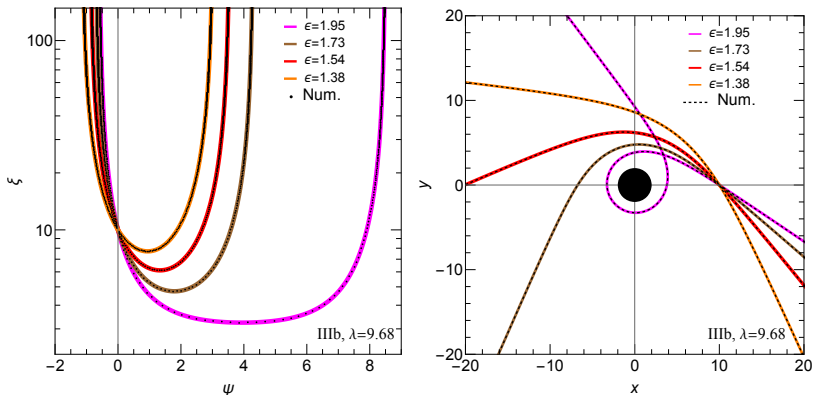
Rysunek: Próbkę wewnętrznych orbit związanych (typ IIa) dla $\lambda = 4.2$. Jednolite kolorowe linie odpowiadają rozwiązaniom uzyskanym z Rów. (18). Kropkowane linie odpowiadają rozwiązaniom numerycznym.



Rysunek: Próbkę zewnętrznych orbit związanych (typ IIb) dla $\lambda = 4.2$. Jednolite kolorowe linie odpowiadają rozwiązaniom uzyskanym z Rów. (18). Kropkowane linie odpowiadają rozwiązaniom numerycznym.



Rysunek: Próbką zewnętrznych orbit zaabsorbowanych (typ IIIa) dla $\lambda = 4.8$. Jednolite kolorowe linie odpowiadają rozwiązaniom uzyskanym z Rów. (18). Kropkowane linie odpowiadają rozwiązaniom numerycznym.



Rysunek: Próbkę zewnętrznych orbit rozproszonych (typ IIIb) dla $\lambda = 9.68$. Jednolite kolorowe linie odpowiadają rozwiązaniom uzyskanym z Rów. (18). Kropkowane linie odpowiadają rozwiązaniom numerycznym.

Czas własny

Znając postać wyrażenia $\xi = \xi(\psi)$, możemy obliczyć odpowiadający ruchowi czas własny poprzez scałkowanie równania (7b), czyli

$$s(\psi) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\psi \xi^2(\psi') d\psi'. \quad (20)$$

Bezpośrednie scałkowanie kwadratu wyrażenia (18) jest możliwe, ale skomplikowane. O wiele łatwiej jest użyć uproszczonej wersji tego wyrażenia

$$\xi(\psi) = \xi_1 + \frac{f'(\xi_1)}{4 \left[\wp(\psi) - \frac{1}{24} f''(\xi_1) \right]}.$$

Innymi słowy opisujemy ruch względem perycentrum. Czas właściwy który upłynął podczas ruchu z $\psi = 0$ do jakiegoś $\psi = \psi_2$ możemy zapisać poprzez

$$s_*(\psi_2; \xi_1) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\psi_2} \left\{ \xi_1^2 + \frac{\frac{1}{2} f'(\xi_1) \xi_1}{\wp(\psi) - \frac{1}{24} f''(\xi_1)} + \frac{\frac{1}{16} [f'(\xi_1)]^2}{\left[\wp(\psi) - \frac{1}{24} f''(\xi_1) \right]^2} \right\} d\psi. \quad (21)$$

Powyższą całkę można policzyć korzystając z podstawowych własności funkcji eliptycznych Weierstrassa.

Rozważmy teraz ruch cząstki z dowolnego położenia ξ_0 , do początku układu współrzędnych (w stronę czarnej dziury), aż do perycentrum w ξ_1 . Następnie cząstka porusza się w przeciwną stronę, na zewnątrz układu współrzędnych, do położenia w odległości ξ . Kąty ψ_1 i ψ_2 możemy zdefiniować następująco

$$\psi_1 = - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi'}{\sqrt{f(\xi')}} = \int_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{f(\xi')}},$$

$$\psi_2 = \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi'}{\sqrt{f(\xi')}}.$$

Oba kąty są większe lub równe od zera. Niech $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Dzięki symetrii, czas własny całego ruchu może zostać zapisany poprzez

$$s(\psi) = s_*(\psi_1; \xi_1) + s_*(\psi_2; \xi_2) = s_*(\psi_1; \xi_1) + s_*(\psi - \psi_1; \xi_1). \quad (22)$$

Możemy interpretować powyższe wyrażenie jako zastępcze dla całki (20) z $\xi(\psi)$ danym przez równanie (18). Funkcja $s_*(\psi_2; \xi_1)$ jest nieparzystą funkcją ψ_2 , dzięki czemu dostajemy $s(\psi = 0) = 0$. Można sprawdzić, że takie samo wyrażenie opisuje ruch względem apocentrum.

Współrzędną czasową τ liczymy w analogiczny sposób.

- Otrzymaliśmy nowy opis ruchu cząstek próbnych.
- Mocne strony naszego opisu:
 - zależy tylko od stałych ruchu λ , λ_z , ε i wyboru położeń początkowych (ξ_0, ψ_0) ,
 - tylko jedna funkcja $\xi(\psi)$ dla wszystkich rodzajów ruchów,
 - funkcja $\xi(\psi)$ jest analityczna i dobrze zdefiniowana (w Mathematicie).
- Słabością opisu jest to, że funkcje $s(\psi)$ i $\tau(\psi)$ nie są analityczne.
- Idealna metoda do opisu cząstek gazu Vlasowa.