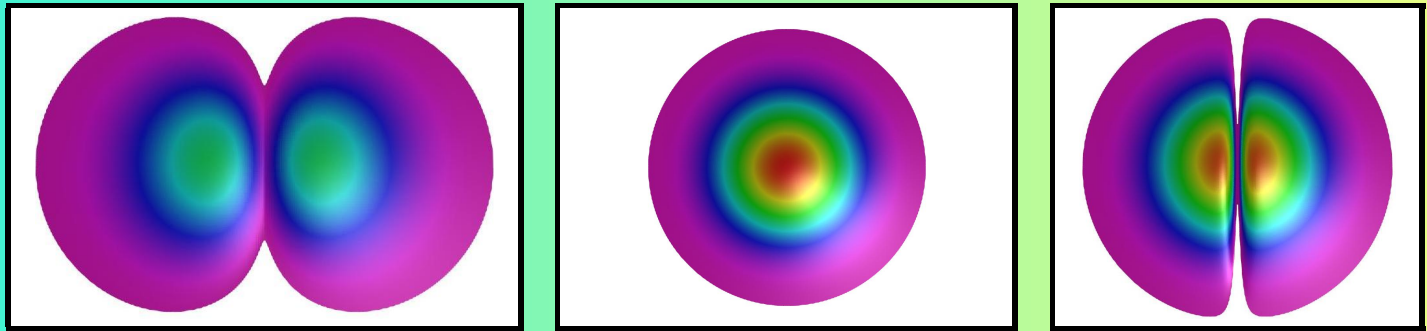
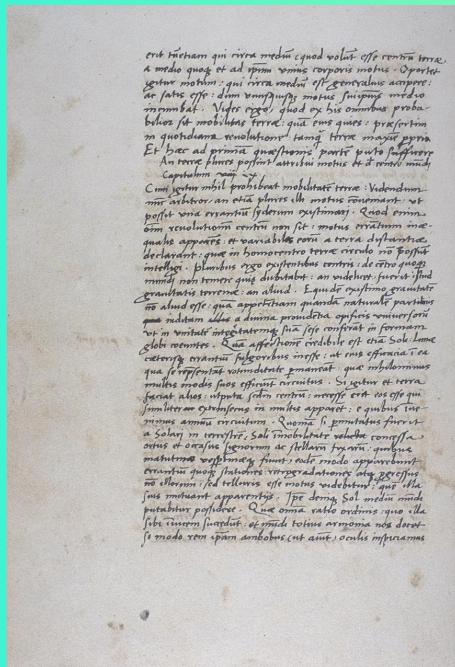


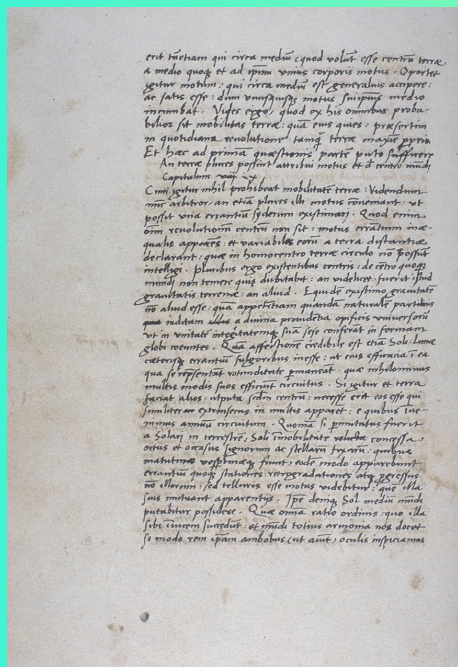
A. Odrzywołek (IFUJ, 2004)

Interesujące problemy teorii rotujących gwiazd



Mikołaj Kopernik „*De Revolutionibus*”, Księga I, Rozdział IX:

Mikołaj Kopernik „*De Revolutionibus*”, Księga I, Rozdział IX:



"Ja w każdym razie mniemam, że ciężkość nie jest niczym innym, jak tylko naturalną dążnością, którą boska opatrność Stwórcy wszechświata nadała częściom po to, żeby łączyły się w jedność i całość, skupiając razem w kształt kuli. A jest rzeczą godną wiary, że taka dążność istnieje również w Słońcu, Księżycu i innych świecących planetach, po to, by na skutek jej działania trwały w tej krągłości..."

SFEROID MACLAURIN'A



- C. Maclaurin, *Treatise on fluxions*, 1742
- Jedno z pierwszych zastosowań metod Newtona: rachunku nieskończenie małych
- Obrona przed atakami biskupa G. Berkely'a

$$\Phi_g(x, y, z) = \pi G \rho \left[(a_x^2 - x^2) A_x + (a_y^2 - y^2) A_y + (a_z^2 - z^2) A_z \right]$$

$$A_i = a_x a_y a_z \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)(a_x^2 + u)(a_y^2 + u)(a_z^2 + u)}$$

$$\Phi_c(x, y, z) = \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)$$

$\Phi_g + \Phi_c = C = \text{const}$ \longrightarrow równanie pewnej elipsoidy.

- Żądając aby osie tej elipsoidy były a_x, a_y, a_z otrzymujemy układ 3 równań
- Rozwiązanie układu daje kształt elipsoidy w funkcji parametrów ρ, Ω, V

UKŁAD RÓWNAŃ

$$(1) \frac{\tilde{C}}{a_x^2} = \pi G \rho A_x - \frac{1}{2}\Omega^2$$

$$(2) \frac{\tilde{C}}{a_y^2} = \pi G \rho A_y - \frac{1}{2}\Omega^2$$

$$(3) \frac{\tilde{C}}{a_z^2} = \pi G \rho A_z$$

$$(4) \tilde{C} = \pi G \rho (a_x^2 A_x + a_y^2 A_y + a_z^2 A_z) - C$$

$$(5) V = \frac{4}{3} \pi a_x a_y a_z$$

$$(V, \rho, \Omega) \longrightarrow (a_x, a_y, a_z, C, \tilde{C})$$

PARAMETRY OPISUJĄCE ROTACJĘ

- Prędkość kątowna Ω
- Moment pędu J
- $\chi \equiv \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$
- Stosunek $E_k/|E_g|$
- Bezwymiarowy moment pędu $j^2 = \frac{1}{4\pi G} \frac{J^2}{M^{10/3}} \rho_{max}^{1/3}$
- Mimośród przekroju e
- Spłaszczenie $\varepsilon = R_p/R_{eq}$

ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ

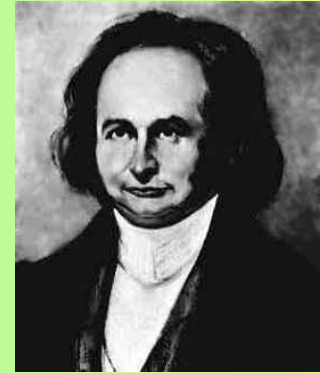
$$\chi = \frac{\varepsilon(1 + 2\varepsilon^2) \arccos \varepsilon - 3\varepsilon^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

- Dla $\frac{E_k}{E_g} = 0 \longrightarrow$ nieruchoma kula
- Dla $0 < \frac{E_k}{E_g} < 0.5 \longrightarrow$ sferoid Maclaurina
- Dla $\frac{E_k}{E_g} = 0.5 \longrightarrow$ nieskończony „placek” w spoczynku

Tw. wirialne: $\frac{E_k}{E_g} = \frac{1}{2} - \int p d^3\mathbf{r} / E_g \longrightarrow 0 < \frac{E_k}{E_g} < \frac{1}{2}$

ELIPSOIDA JACOBIEGO

Dla $E_k/E_g > 0.1375$ (czyli $\chi > 0.187$)
pojawiają się dodatkowe rozwiązania!
(C. Jacobi, 1834)

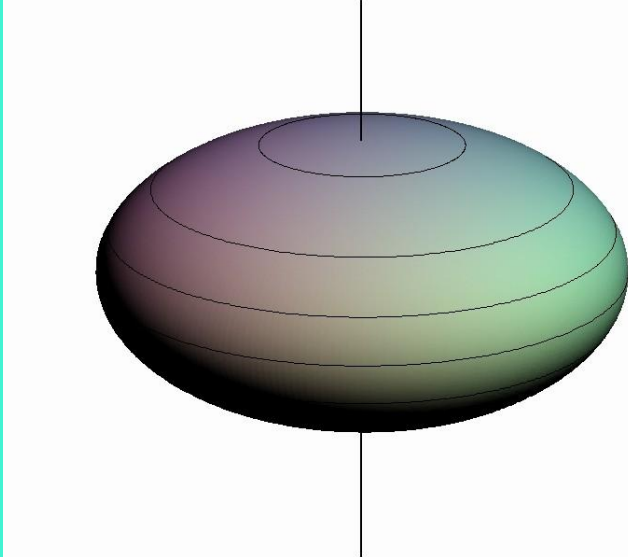


- Dla $\frac{E_k}{E_g} \geq 0.1375 \rightarrow$ sferoid Maclaurina
- Dla $0.1375 < \frac{E_k}{E_g} < 0.5 \rightarrow$ elipsoida (trójosiowa) Jacobiego
- Dla $\frac{E_k}{E_g} = 0.5 \rightarrow$ nieskończony „pręt” w spoczynku

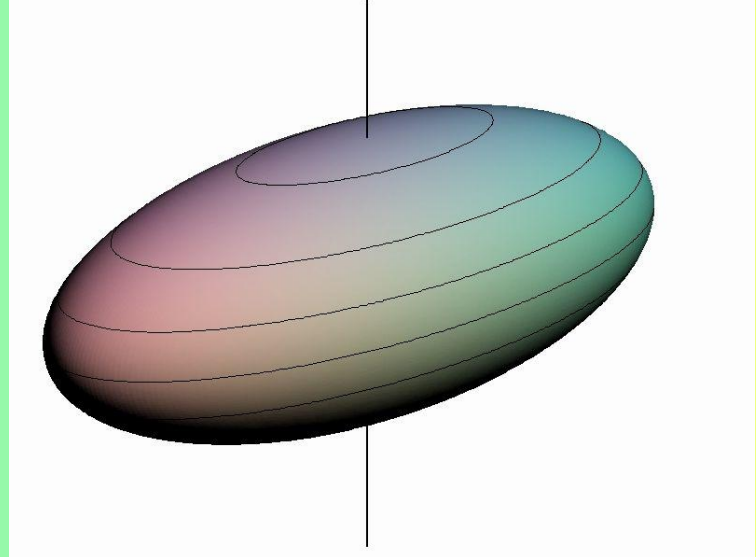
Dla zadanej masy M i krętu J elipsoida Jacobiego jest „stanem podstawowym” - minimum energii mechanicznej $E_k + E_g$.

Sferoid Maclaurina jest więc „stanem metastabilnym”.

Sferoid Maclaurina



Elipsoida Jacobiego



$$\frac{E_k}{E_g} = 0.16$$

STABILNOŚĆ SFEROIDU MACLAURINA I ELIPSOIDY JACOBIEGO

- $E_k/E_g < 0.1375 \longrightarrow$ sferoid Maclaurina jest stabilny
- $E_k/E_g = 0.1375 \longrightarrow$ sferoid Maclaurina jest identyczny z elipsoidą Jacobiego
- $0.1375 < E_k/E_g < 0.27 \longrightarrow$ s. Maclaurina jest wiekowo niestabilny
- $E_k/E_g > 0.27 \longrightarrow$ s. Maclaurina jest dynamicznie niestabilny
- $0.1375 < E_k/E_g < 0.1628 \longrightarrow$ e. Jacobiego jest stabilna
- $E_k/E_g > 0.1628 \longrightarrow$ elipsoida Jacobiego jest dynamicznie niestabilna

„KOLAPS” KWAZISTATYCZNY I

Oznaczmy: T_d – typowy czas dla procesów dyssypatywnych
 T_e – typowy czas ewolucji układu

$$T_e \gg T_p$$

- Układ osiąga $E_k/E_g = 0.27$
- Dochodzi do niestabilności dynamicznej
- Gwałtowna utrata nadmiaru momentu pędu
- Zniszczenie układu

$$T_e \ll T_p$$

- Układ osiąga $E_k/E_g = 0.1375$
- Tworzy się e. Jacobiego
- Układ osiąga $E_k/E_g \simeq 0.16$
- Tworzy się gruszka Poincarégo
- Dwa okrążające się ciała

MODEL ROCHE' A

Masa M skupiona w centrum *plus* otoczka o gęstości $\rho \rightarrow 0$.
Powierzchnie ekwipotencjalne:

$$\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = \text{const}$$

Powierzchnia krytyczna:

siła odśrodkowa i grawitacyjna równoważą się:

$$\frac{GM}{R_e^2} = \Omega^2 R_e, \quad R_e = \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}}$$

„KOLAPS” KWAZISTATYCZNY II

Przy zachowanym kręcie J , $\Omega \sim R^{-2}$.

WNIOSEK: powierzchnia krytyczna kurczy się szybciej niż samo ciało:

$$R_e \sim R^{4/3}$$

- Ciało znajduje się wewnątrz powierzchni krytycznej
- Ciało się kurczy: Ω rośnie
- Powierzchnia krytyczna zbliża się do pow. ciała
-Samo ciało się rozszerza
- Powierzchnia Roche'a zostaje wypełniona
- Następuje „niestabilność równikowa” - utrata masy

DWIE DROGI ROTUJĄCYCH CIAŁ

SCIEŻKA MACLAURINA

- ciało o stałej gęstości
- kurczenie się
- rozpad
- fragmenty wchodzi na:
 - ścieżkę Roche'a
 - ścieżkę Maclaurina

SCIEŻKA ROCHE'A

- ciało o prawie punktowym jądrze
- kurczenie się
- wypływ materii z równika
- powstanie dysku
- jądro (dysk) wchodzi na:
 - ścieżkę Roche'a
 - ścieżkę Maclaurina

UOGÓLNIONY MODEL JEANSA

Sferoid Maclaurina o masie M i objętości V_1 plus otoczka o gęstości $\rho \rightarrow 0$ i objętości V_2 .

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V_1 + V_2}, \quad \rho_M = \frac{M}{V_1}$$
$$\chi_R = \frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}}, \quad \chi_M = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_M}$$

$$\chi_R = 0.36, \quad \chi_M = 0.187$$

$$\rho_M / \bar{\rho} = \chi_R / \chi_M \simeq 2 \text{ co daje } n \simeq 0.6 \quad [0.83, 0.808]$$

„TRZECIA IDEA SHAPIRO”

Shapiro, *The secular bar-mode instability in rapidly rotating stars revisited*,
ApJ **613** 1213-1220 (2004).

- Przejście s. Maclaurina \rightarrow e. Jacobiego wymaga utraty energii
- Podstawowy proces: lepkość
- Ale: lepkość produkuje ciepło
- Ciepło zmienia równanie stanu materii
- Prowadzi to do rozszerzania się ciała
- W efekcie rotacja może spaść poniżej progu niestabilności

ELIPSOIDY DEDEKINDA I RIEMANNA

- L. Dirichlet, 1860, J. Reine Angew. Math. **58**, 181
- R. Dedekind, 1860, J. Reine Angew. Math. **58**, 217
- B. Riemann, 1860, Abhandl. Konigl. Ges. Wis. Gottingen, **9**, 3

Pole prędkości $\mathbf{v} (v_x, v_y, v_z)$: $v_x = -q \zeta y$, $v_y = (1 - q) \zeta x$, $v_z = 0$,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \zeta \mathbf{e}_z$$

Równanie elipsoidy:

$$G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Wektor normalny: $\mathbf{n} = \nabla G = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$

Warunek, że ciecz „nie wypływa” z elipsoidy, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, daje:

$$q = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad 1 - q = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczy”-- linii prądu:

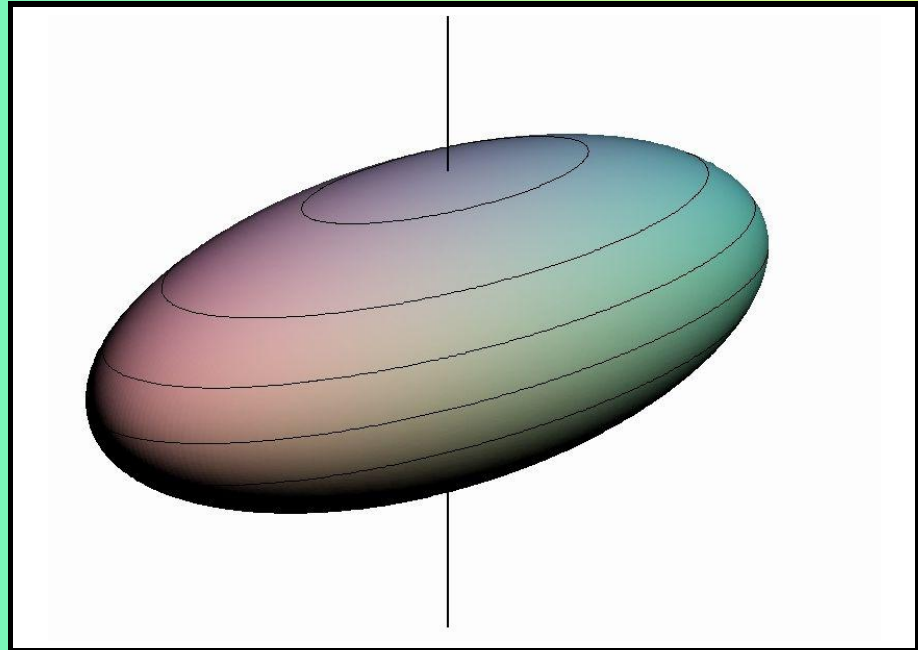
$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -q \zeta y \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = (1 - q) \zeta x \end{aligned}$$

Podstawiamy: $x = A e^{i\Omega t}$, $y = B e^{i\Omega t}$:

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q \zeta \\ (1 - q) \zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

Otrzymujemy związek pomiędzy wirowością ζ elipsoidy Dedekinda a prędkością kątową Ω *elipsoidy Jacobiego*:

$$\zeta = \frac{a^2 + b^2}{ab} \Omega$$



DEFINICJA ROTUJĄCEJ BAROTROPY
przybliżenie elipsoidalne wg. Shapiro

1. Elipsoidalny rozkład gęstości

$\rho(m)$ identyczne ze sferyczną politropą

2. „Elipsoidalne” ruchy:

Sztywna rotacja $\Omega = const$

Jednorodna wirowość $\zeta = const$

Elipsoidalna ekspansja (kontrakcja)

3. Grawitacja Newtonowska

4. Barotropowe równanie stanu: $P = K \rho^\Gamma$

$K = K(s)$ nie jest stałą!

KSZTAŁT ZIEMI

Zdefiniujemy:

$m = F_c / \widehat{F}_g$ - stosunek siły odśrodkowej na równiku do średniej siły przyciągania grawitacyjnego,

e - mimośród przekroju południkowego.

I. NEWTON (1687): $\frac{e}{m} = \frac{5}{4}$ CH. HUYGENS (1690): $\frac{e}{m} = \frac{1}{2}$

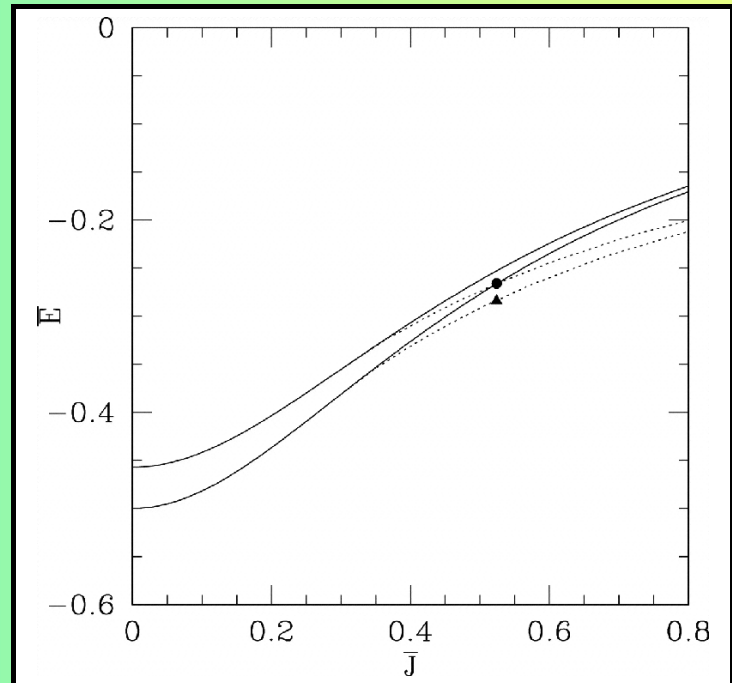
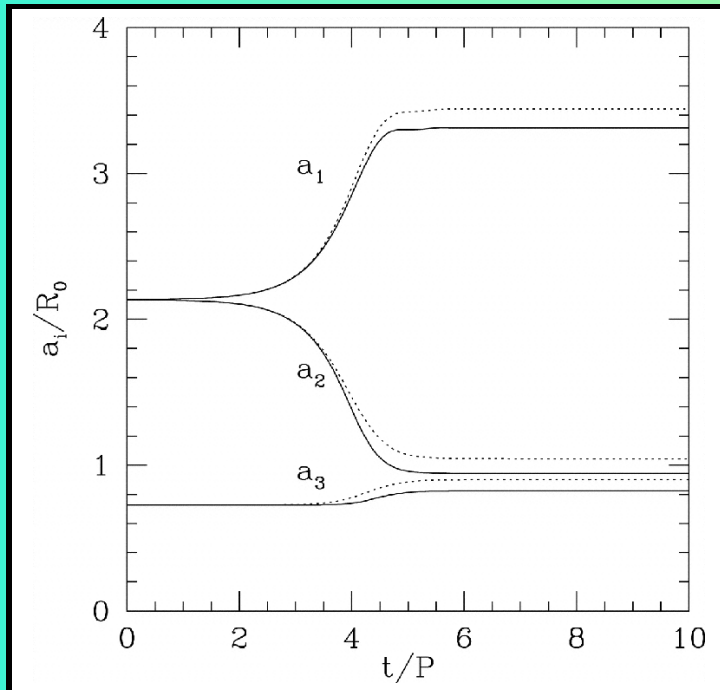
A.-C. CLAIRAUT (*Theorie de la figure de la terre*, 1743)

$$\frac{e}{m} = \frac{5}{2 [2 + \eta(a_s)]}$$

Dla $\rho = const$: $\eta(a_s) = 0$.

Dla masy skoncentrowanej w $r = 0$: $\eta(a_s) = 3$.

WYNIKI „elipsoidalnej hydrodynamiki”



CEL: EWOLUCJA ROTUJĄCEJ GWIAZDY

Podójście I	Podójście II
Rodzina sferoidalnych powierzchni	Kontury stałej masy wyliczone
Opis rotacji poprzez $j(m)$	Opis rotacji poprzez Φ_c
Rotacja podlega ewolucji	Rotacja założona z góry
Pełny opis materii w gwiazdzie	Barotropowe równanie stanu
Rotacja „powłokowa” (<i>shellular</i>)	Rotacja cylindryczna
Brak równowagi hydrostatycznej	Pełna równowaga hydrostatyczna

TOROIDALNY ZAPŁON BIAŁEGO KARŁA

Pierwsza poprawka:

$$h_1 = h_c w_{4/3}(\lambda r) - \Phi_c(r) + \Delta C$$

w centrum:

$$w_n(x) \simeq 1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{n}{120} x^4 + \dots, \quad \Phi_c \simeq -\frac{1}{2} \Omega_0^2 r^2 + \dots$$

w tym przybliżeniu:

$$h_1(r) = h_c + \left(\Omega_0^2 - \frac{4}{3} \pi G \rho_c \right) r^2 + \dots$$

Jeżeli $\Omega_0^2 > \frac{4}{3} \pi G \rho_c$ to $\rho_c < \rho_{max}$!

Gęstość zapłonu białego karła $\rho_c \simeq 2 \cdot 10^9$ daje $\Omega_0 \sim 25$ rad/s.

Heger & Langer 2000:

$$\Omega_0(\text{Fe}) > 30 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_0(\text{He}) \sim 10^{-3} \text{ rad/s}$$

ROTUJĄCE BAROTROPY W OTW

$$ds^2 = (e^\nu)^2 dt^2 - (e^\mu)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2) - (e^\psi)^2 (\omega dt - d\phi)^2$$

gdzie ν, μ, ψ, ω to funkcje r i θ .

Czteropędkość: $u^\alpha = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}} [1, 0, 0, \Omega] = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}} (t^\alpha + \Omega \phi^\alpha),$

$v \equiv |\mathbf{v}| = e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega).$

Równanie stanu: $p = p(\varepsilon)$; entalpia: $\nabla h = \nabla p / (\varepsilon + p)$

$$\nabla h + \nabla \nu + \nabla \ln \sqrt{1-v^2} + \frac{v^2}{1-v^2} \nabla \Omega / (\Omega - \omega) = 0$$