Asymetria ν–$\bar{\nu}$ w (termicznym) widmie pre-supernowej

IDEA:

Przewidzieć wybuch supernowej
opierając się na detekcji neutrin z pre-supernowej

Interesujące fazy ewolucji masywnej gwiazdy:

Faza spalania	Czas przed kolapsem rdzenia
„O” (tlenu)	kilka miesięcy
„Ne” (neonu)	kilka miesięcy (Ne flash)
„Si” (krzemu)	od kilku godzin do 2 tygodni

Dygresja: przewidywanie supernowych

- $t = -100000$ *lat:* Gwiazda jest na etapie:
  - — czerwonego olbrzyma
  - — „niebieskiej pętli” (blue loop)
  - — inne : LBV, gwiazda WR
- $t = -300$ *lat:* Następuje zapłon węgla w centrum
  - — brak widocznych efektów na powierzchni!
- $t = -1$ *rok:* Zapłon tlenu
- $t = -6$ *miesięcy:* błysk neonowy (Ne flash)
- $t = -2$ *dni:* zapłon Si [$\bar{\nu}_e$ **z anihilacji** e^+e^-**, GADZOOKS!**]

- $t = -1$ *godzina:* ustanie reakcji jądrowych, ewentualny zapłon Si w shell-u
- $t = -300$ *milisekund:* utrata stabilnosci dynamicznej: start kolapsu
- $t = -100$ *milisekund:* neutrina z neutronizacji 10^{54} erg/s [**Hyper-Kamiokande**]

  — emisja fal grawitacyjnych [**LIGO**]
- $t = 0$*:* gęstość centralna osiąga maksimum (core-bounce)
- $t = 10$ *milisekund:* fala uderzeniowa rozchodzi się na zewnątrz z $R \sim 40$ km

- $t = 100$ ***milisekund*** *...1* ***sekunda:*** protogwiazda neutronowa emituje 99% energii kolapsu w postaci neutrin
  - — rewitalizacja fali uderzeniowej
  - — emisja fal grawitacyjnych z konwektywnego jądra
  - — [**SNEWS, LIGO**]
- $t = 100$ ***sekund*** protogwiazda neutronowa osiąga normalne rozmiary $R \simeq 20km$
- $t = 5$ *godzin:* fala uderzeniowa dociera do powierzchni: [**pierwsze obserwacje „optyczne”**]

- $t = 20$ *dni:* maksimum jasności supernowej w świetle widzialnym [**typowe odkrycie supernowej**]
- $t = 3$ *miesiące:* jasność zanika zgodnie z prawem radioaktywnego rozpadu ^{56}Ni$\rightarrow^{56}$Co$\rightarrow^{56}$Fe
- $t = 1 \ldots 2$ *lata:* supernowa gaśnie

Pierwsze oszacowania

Dominujący proces: anihilacja:

$$e^+ + e^- \longrightarrow \nu_x + \bar{\nu}_x.$$

Typowa energia ($m_e = 0.511\,\mathrm{MeV}, \quad kT \simeq 0.319\,\mathrm{MeV}$):

$$\langle \mathcal{E}_\nu \rangle \sim m_e + kT$$

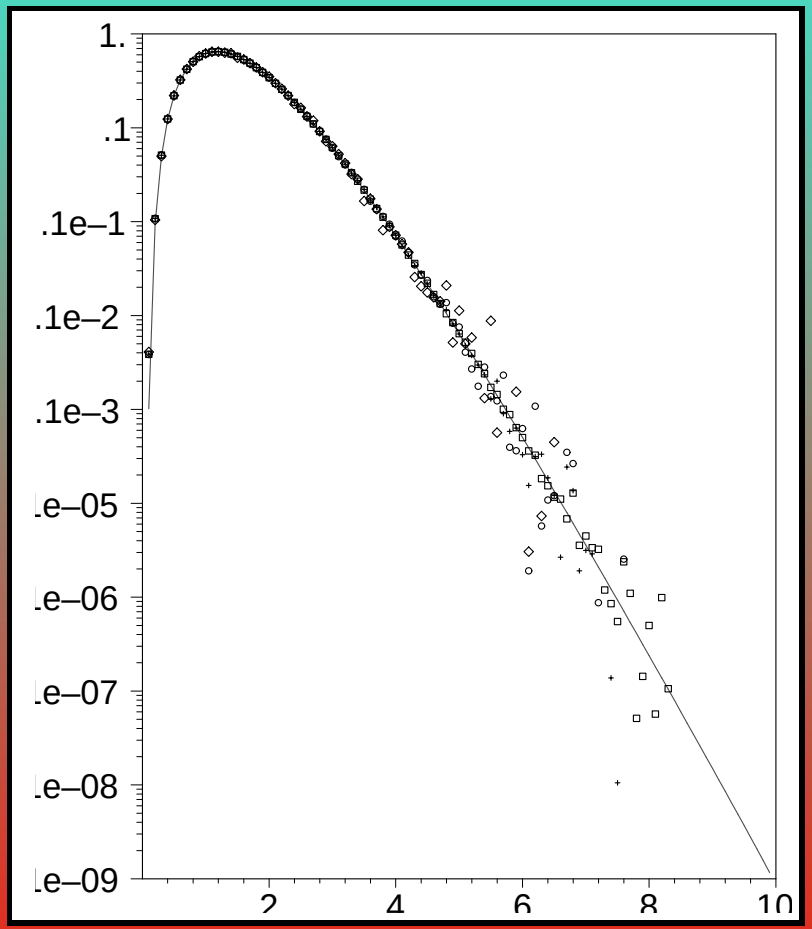
Jasność neutrinowa:

$$L_\nu \simeq 10^{13} L_\odot$$

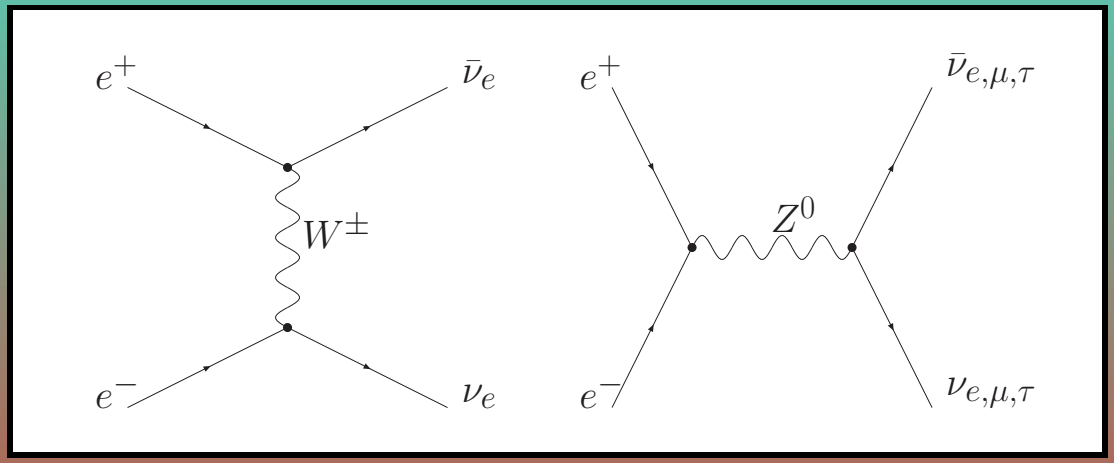
Gwiazda jaśniejsza (w neutrinach) od Słońca
z odległości 100 lat świetlnych!

Symulacje Monte Carlo

- Kiepska dokładność dla $\mathcal{E} > 5$ MeV
- Błąd w symulacji
- Długotrwałe obliczenia



Anihilacja w Modelu Standardowym



W astrofizyce:

$$E \ll \mathrm{M}_{W^\pm,Z^0} \text{ gdzie } \mathrm{M}_{W^\pm,Z^0} \sim 100 \text{ GeV}$$

Obliczenia D. Dicusa (1972)

Wymiana bozonu $W^{\pm}$:

$$-\frac{iG_F}{\sqrt{2}}\bar{u}_\nu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_e \times \bar{v}_e\gamma_\alpha(1-\gamma_5)v_\nu$$

Wymiana bozonu Z^0:

$$-\frac{iG_F}{\sqrt{2}}\bar{u}_\nu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)v_\nu \times \bar{v}_e\gamma_\alpha(g_V - g_A\,\gamma_5)u_e$$

Stosujemy transformację Fierza:

$$\bar{a}\,[\gamma^\mu(1-\gamma_5)]\,b \times \bar{c}\,[\gamma_\mu(1-\gamma_5)]\,d = \pm\bar{a}\,[\gamma^\mu(1-\gamma_5)]\,d \times \bar{c}\,[\gamma_\mu(1-\gamma_5)]\,b$$

i pierwsza amplitude zapisujemy jako:

$$-\frac{iG_F}{\sqrt{2}}\bar{u}_\nu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)v_\nu \times \bar{v}_e\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_e$$

Dzięki temu, aby uzyskać amplitudę anihilacji na ν_e wystarczy do g_V i g_A dodać jedynki.

Anihilacja jako oddziaływanie punktowe

Transformacja Fierza pozwala zapisać amplitudę w postaci czterofermionowego $(e^+, e^-, \nu_x, \bar{\nu}_x)$ oddziaływania punktowego:

$$\mathcal{M} = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\nu \gamma^\alpha (1-\gamma_5) v_\nu \times \bar{v}_e \gamma_\alpha (C_V^f - C_A^f \, \gamma_5) u_e$$

gdzie:

$$C_V^e = \frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, \qquad C_A^e = \frac{1}{2}$$

$$C_V^{\mu,\tau} = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, \qquad C_A^{\mu,\tau} = -\frac{1}{2}$$

$\sin^2\theta_W = 0.22280 \pm 0.00035$

- W klasycznej pracy Beaudet, Petrosian, Salpeter z 1967 roku rozpatrywano przypadek z $C_V = 1$ i $C_A = 0$ dla produkcji par $\nu_e - \bar{\nu}_e$.
- Całkowita jasność neutrinowa jest zależna od $C^e_{V,A} + n\, C^{\mu,\tau}_{V,A}$, gdzie n to liczba neutrin innych niż elektronowe.

Prawdopodobieństwo anihilacji

$$M^2 = 8{G_F}^2 \Big[\left(C_A^f - C_V^f\right)^2 P_1 \cdot Q_1 \, P_2 \cdot Q_2 + \left(C_A^f + C_V^f\right)^2 P_2 \cdot Q_1 \, P_1 \cdot Q_2 + {m_e}^2 \left({C_V^f}^2 - {C_A^f}^2\right) Q_1 \cdot Q_2 \Big]$$

M^2 zawiera część symetryczną i antysymetryczną i **nie jest** „P-symetryczne”!

$$M^2 = 8{G_F}^2 \Big\{ \left(C_A^2 + C_V^2\right) [P_1 \cdot Q_1 \, P_2 \cdot Q_2 + P_2 \cdot Q_1 \, P_1 \cdot Q_2] + {m_e}^2 \left(C_V^2 - C_A^2\right) \, Q_1 \cdot Q_2 \Big\} + 16{G_F}^2 C_V C_A \, [P_1 \cdot Q_1 \, P_2 \cdot Q_2 - P_2 \cdot Q_1 \, P_1 \cdot Q_2]$$

Jasność neutrinowa

Znając M^2 możemy napisać formalne wyrażenia na jasność neutrinową:

$$\frac{4}{(2\pi)^8}\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1}\frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2}\frac{d^3\mathbf{q}_1}{2\mathcal{E}_1}\frac{d^3\mathbf{q}_2}{2\mathcal{E}_2}\Lambda\ f_1 f_2\ \delta^4(P_1+P_2-Q_1-Q_2)\ M^2$$

Gdzie rozkłady Fermiego-Diraca:

$$f_1 = \frac{1}{e^{(E_1-\mu)/kT}+1}, \qquad f_2 = \frac{1}{e^{(E_2+\mu)/kT}+1}$$

- $\Lambda = E_1 + E_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ daje całkowitą jasność neutrinową
- $\Lambda = \mathcal{E}_1$ – jasność neutrinową
- $\Lambda = \mathcal{E}_2$– jasność antyneutrinową
- $\Lambda = 1$ – strumień cząstek

Przekrój czynny Dicusa

Musimy „pozbyć się” delty Diraca $\delta^4(P_1 + P_2 - Q_1 - Q_2)$.
Sposób pierwszy: wzór Lenarda:

$$\int \frac{d^3\mathbf{q}_1}{2\,\mathcal{E}_1}\frac{d^3\mathbf{q}_2}{2\,\mathcal{E}_1}\, Q_1^\alpha Q_2^\beta\, \delta^4(P_1 + P_2 - Q_1 - Q_2) = \frac{\pi}{24}\left[g^{\alpha\beta}(P_1+P_2)^2 + 2\,(P_1^\alpha + P_2^\alpha)(P_1^\beta + P_2^\beta)\right]\Theta\left[(P_1+P_2)^2\right]$$

Pozbywamy się zależności od czteropędów neutrin i otrzymujemy przekrój czynny:

$$\sigma v_D = \frac{{G_F}^2}{12\pi} \frac{{m_e}^4}{E_1 E_2} \left[\left(C_V^{f\,2} + C_A^{f\,2} \right) \left(1 + 3\,\frac{P_1 \cdot P_2}{{m_e}^2} + 2\,\frac{(P_1 \cdot P_2)^2}{{m_e}^4} \right) + \left(C_V^{f\,2} - C_A^{f\,2} \right) \left(1 + 2\,\frac{P_1 \cdot P_2}{{m_e}^2} \right) \right]$$

Teraz możemy obliczać całkę: $\frac{4}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2\, \Lambda\, \sigma v_D\, f_1 f_2.$

ale Λ musi być funkcją energii elektronu i pozytonu.

Prawie cała informacja zawarta w M^2 została utracona.

Wnioski z pracy Dicusa

Z przekroju czynnego Dicusa możemy obliczyć trzy wielkości:

- Jasność neutrinową (kombinowaną $\nu + \bar{\nu}$), D. Dicus (1972)
- Strumień cząstek
- Średnią energię pary neutrino-antyneutrino

$$Q = \frac{G^2 m^9}{18\pi^5}\{(7C_V{}^2 - 2C_A{}^2)[G_0^- G_{-1/2}^+ + G_{-1/2}^- G_0^+] + 9C_V{}^2[G_{1/2}^- G_0^+ + G_0^- G_{1/2}^+]$$
$$+ (C_V{}^2 + C_A{}^2)[4G_1^- G_{1/2}^+ + 4G_{1/2}^- G_1^+ - G_1^- G_{-1/2}^+ - G_{1/2}^- G_0^+ - G_0^- G_{1/2}^+ - G_{-1/2}^- G_1^+]\}$$

Powyższy wynik jest używany w niezmienionej formie do dziś.

Separacja do postaci iloczynów całek Fermiego-Diraca jest możliwa gdyż:

$$d^3\mathbf{p} = p^2\, dp d(\cos\theta)\, d\phi, \qquad p^2 dp = \sqrt{E^2 - m^2} E dE$$

$$P_1 \cdot P_2 = E_1 E_2 - \sqrt{E_1^2 - m^2}\sqrt{E_2^2 - m^2}\cos\theta$$

$$\int \cos^n\theta\, d\Omega_1 d\Omega_2 = 0 \quad \textbf{dla parzystego} \quad n$$

Momenty energii elektronu

- Z artykułu Dicusa pośrednio wynika jak obliczyć *dowolny* moment enegrii *anihilującego* elektronu lub pozytonu.
- Można łatwo oszacować energię neutrina
- ...ale nikt tego nie zrobił ...

Definiujemy funkcję:

$$
\begin{aligned}
M_{\mp}^{nm} = {} & (7{C_V}^2 - 2{C_A}^2)\, G^{\mp}_{n/2-1/2} G^{\pm}_{m/2-1/2} \\
& + 9{C_V}^2\, G^{\mp}_{n/2} G^{\pm}_{m/2} + ({C_V}^2 + {C_A}^2) \Big(4\, G^{\mp}_{n/2+1/2} G^{\pm}_{m/2+1/2} \\
& \qquad - G^{\mp}_{n/2-1/2} G^{\pm}_{m/2+1/2} - G^{\mp}_{n/2+1/2} G^{\pm}_{m/2-1/2} \Big)
\end{aligned}
$$

Całki Fermiego-Diraca

W postaci bezwymiarowej:

$$G_n^{\pm}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha^{3+2n}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{2n+1}\sqrt{x^2-\alpha^2}}{1+\exp(x\pm\beta)}\, dx$$

$$\alpha = m_e/kT, \quad \beta = \mu_e/kT, \quad x = E/kT$$

W postaci odzwierciedlającej sens fizyczny:

$$\boxed{G_n^{\pm}(\alpha,\beta) = \frac{1}{m_e^{3+2n}} \int_{m_e}^{\infty} \frac{E^{2n+1}\sqrt{E^2-{m_e}^2}}{1+\exp\left(\frac{E\pm\mu}{kT}\right)}\, dE}$$

Średnia energia pary $\nu - \bar{\nu}$

Strumień energii (jasność neutrinowa):

$$\frac{dE}{dV\,dt} \equiv Q = \frac{{G_F}^2 {m_e}^9}{18\pi^5}\left(M_-^{10} + M_+^{10}\right)$$

Strumień cząstek:

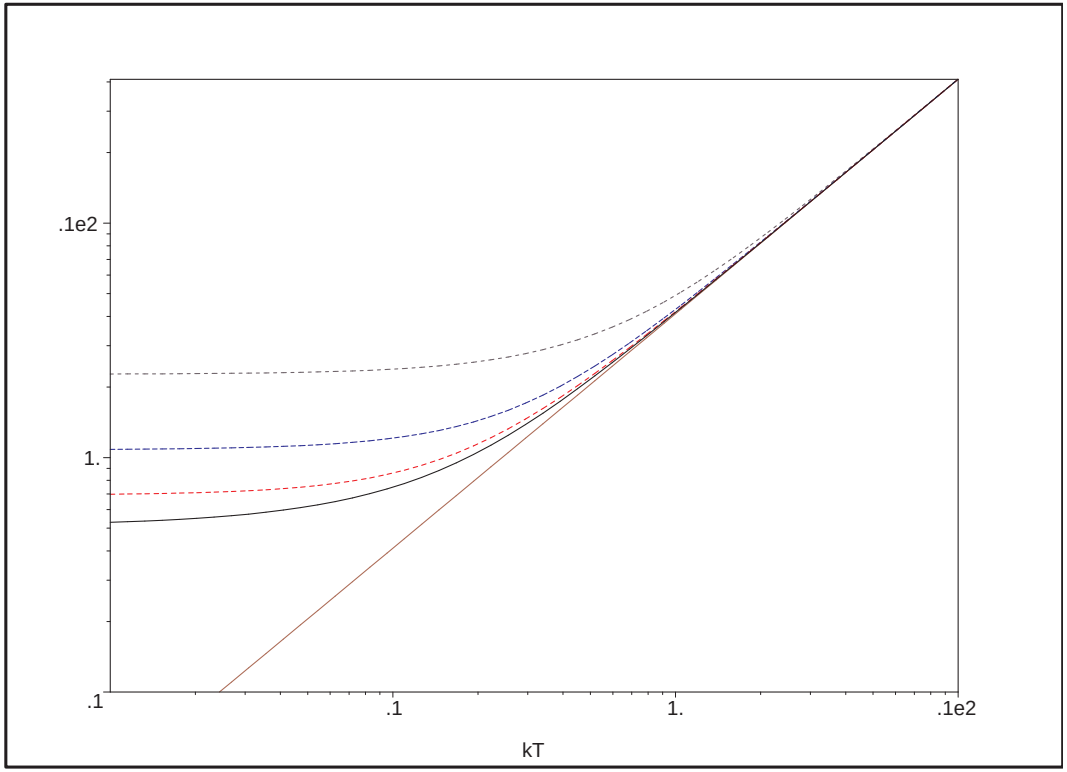
$$\frac{dN}{dV\,dt} \equiv F = 2R = \frac{{G_F}^2 {m_e}^8}{18\pi^5}\left(M_-^{00} + M_+^{00}\right)$$

Średnia energia pary neutrino-antyneutrino:

$$\frac{\langle \mathcal{E} \rangle}{m_e c^2} = \frac{M_-^{10} + M_+^{10}}{M_-^{00} + M_+^{00}}$$

Wartości funkcji $M_\pm^{nm}$ są łatwe do obliczenia numerycznie jako szybkozbieżne całki jednowymiarowe.

Energia średnia jako funkcja μ i kT



Interesujące przypadki graniczne

Nierelatywistyczny ($kT \ll m_e$) i niezdegenerowany ($kT \gg \mu$) gaz elektronowy:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = m_e + \frac{3}{2} kT$$

Gaz zdegenerowany ($\mu \gg kT$):

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{2}{5}\,\mu + 2\,kT$$

Przypadek relatywistyczny ($kT > m_e$) i niezdegenerowany ($kT > \mu$):

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{2700}{7} \frac{\zeta(5)}{\pi^4}\,kT$$

W masywnej gwieździe ($kT \simeq m_e \simeq \mu$):

Tylko numerycznie . . .

Podsumowanie części I

- Więcej z obliczeń D. Dicusa lub podobnych opartych na formule Lenarda nie da się uzyskać.
- Ciągle niewiele wiemy o widmie:
  - — kształt
  - — dyspersja
  - — wysokoenergetyczny ogon
  - — ilość maksimów itp.
- Czy widma neutrin i antyneutrin są identyczne?

Przekrój czynny

Aby obliczyć widmo neutrin musimy wrócić prawie na sam początek:

$$d\sigma v = \frac{1}{2E_1}\frac{1}{2E_2}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta^4(P_1+P_2-Q_1-Q_2)\,\frac{d^3\mathbf{q}_1}{2\mathcal{E}_1}\frac{d^3\mathbf{q}_2}{2\mathcal{E}_2}\,M^2.$$

Przekrój czynny na anihilację e^+e^- produkujacą neutrino *o zadanej energii $\mathcal{E}_i$:*

$$\frac{d\sigma v}{d\mathcal{E}_{1,2}} = \frac{{G_F}^2\,\Theta}{8\pi\,E_1E_2}\left[(C_V+C_A)^2\,H_{1,2}+(C_V-C_A)^2\,H_{2,1}+2\,{m_e}^2\,({C_V}^2+{C_A}^2)H_3\right]$$

$$H_k = \sum_{j=1}^{5} h_k^j\,|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|^{-j}\,, \qquad \Theta \equiv \Theta\left[(\mathcal{E}+\mathcal{E}_-)(\mathcal{E}-\mathcal{E}_+)\right]$$

$$
\begin{aligned}
h_1^1 &= 2\,(\Delta - \mathcal{E}_i E_2)^2 \\
h_1^3 &= -4\delta(\Delta - \mathcal{E}_i E_2)\Delta - p_1^2\Delta^2 + {\mathcal{E}_i}^2 {p_1}^2 {p_2}^2 \sin^2\theta \\
h_1^5 &= 3\,\delta\,\Delta^2 \\
h_2^1 &= 2{E_1}^2{\mathcal{E}_i}^2 \\
h_2^3 &= -4\mathcal{E}_i E_1 \delta\Delta - {p_1}^2\,\Delta^2 + {\mathcal{E}_i}^2 {p_1}^2 {p_2}^2 \sin^2\theta \\
h_2^5 &= 3\,\delta\,\Delta^2 \\
h_3^1 &= \Delta - \mathcal{E}_i(E_1 + E_2)
\end{aligned}
$$

$$\delta = p_1\,(p_1 + p_2\,\cos\theta)$$

$$\Delta = \mathcal{E}_i\,(E_1 + E_2) - P_1 \cdot P_2 - {m_e}^2$$

$$p_i \equiv |\mathbf{p}_i|$$

$$\theta = \angle(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

$$\frac{d\sigma v}{d\mathcal{E}_{1,2}} = \frac{{G_F}^2\,\Theta}{8\pi\;E_1 E_2}\left[(C_V{+}C_A)^2\;H_{1,2} + (C_V{-}C_A)^2\;H_{2,1} + 2\,{m_e}^2\;({C_V}^2{+}{C_A}^2)H_3\right]$$

$$H_k = \sum_{j=1}^{5} h_k^j\,|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|^{-j}\,, \qquad \Theta \equiv \Theta\left[(\mathcal{E}+\mathcal{E}_-)(\mathcal{E}-\mathcal{E}_+)\right]$$

$$\mathcal{E}_\pm = \frac{1}{2}\,(E_1+E_2) \pm \frac{1}{2}\,|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|$$

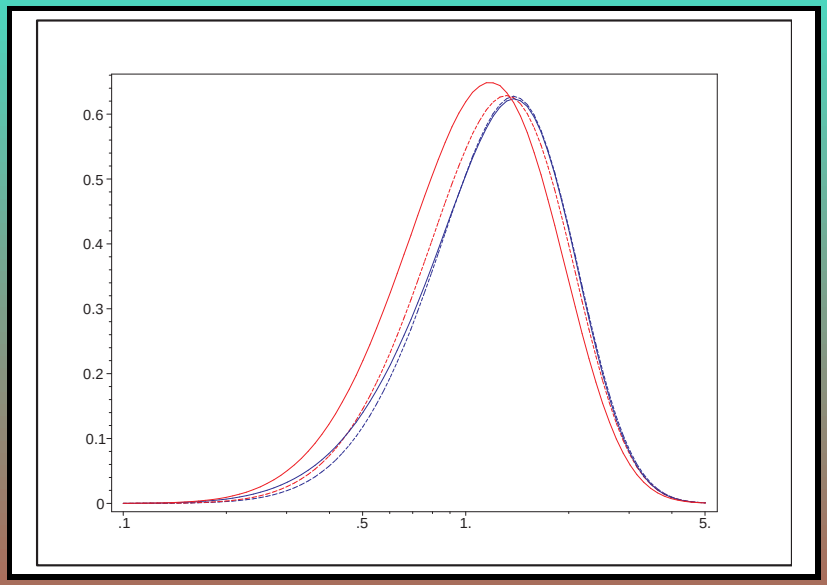
$$\begin{aligned}
h_1^1 &= 2\,(\Delta - \mathcal{E}_i E_2)^2 \\
h_1^3 &= -4\delta(\Delta - \mathcal{E}_i E_2)\Delta - p_1^2\Delta^2 + {\mathcal{E}_i}^2 {p_1}^2 {p_2}^2 \sin^2\theta \qquad p_i \equiv |\mathbf{p}_i| \\
h_1^5 &= h_2^5 = 3\,\delta\,\Delta^2 \qquad \delta = p_1\,(p_1 + p_2\,\cos\theta) \\
h_2^1 &= 2{E_1}^2{\mathcal{E}_i}^2 \qquad \Delta = \mathcal{E}_i\;(E_1+E_2) - P_1\cdot P_2 - {m_e}^2 \\
h_2^3 &= -4\mathcal{E}_i E_1 \delta\Delta - {p_1}^2\;\Delta^2 + {\mathcal{E}_i}^2 {p_1}^2 {p_2}^2 \sin^2\theta \qquad \theta = \angle(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\
h_3^1 &= \Delta - \mathcal{E}_i(E_1+E_2)
\end{aligned}$$

Widmo neutrin i antyneutrin

Widmo neutrin jest dane w postaci całki potrójnej, zwierajacej funkcję schodkową Heaviside'a:

$$\lambda(\mathcal{E}_{1,2}) = \mathcal{N} \int d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \, \frac{d\sigma v}{d\mathcal{E}_{1,2}} f_1 f_2$$

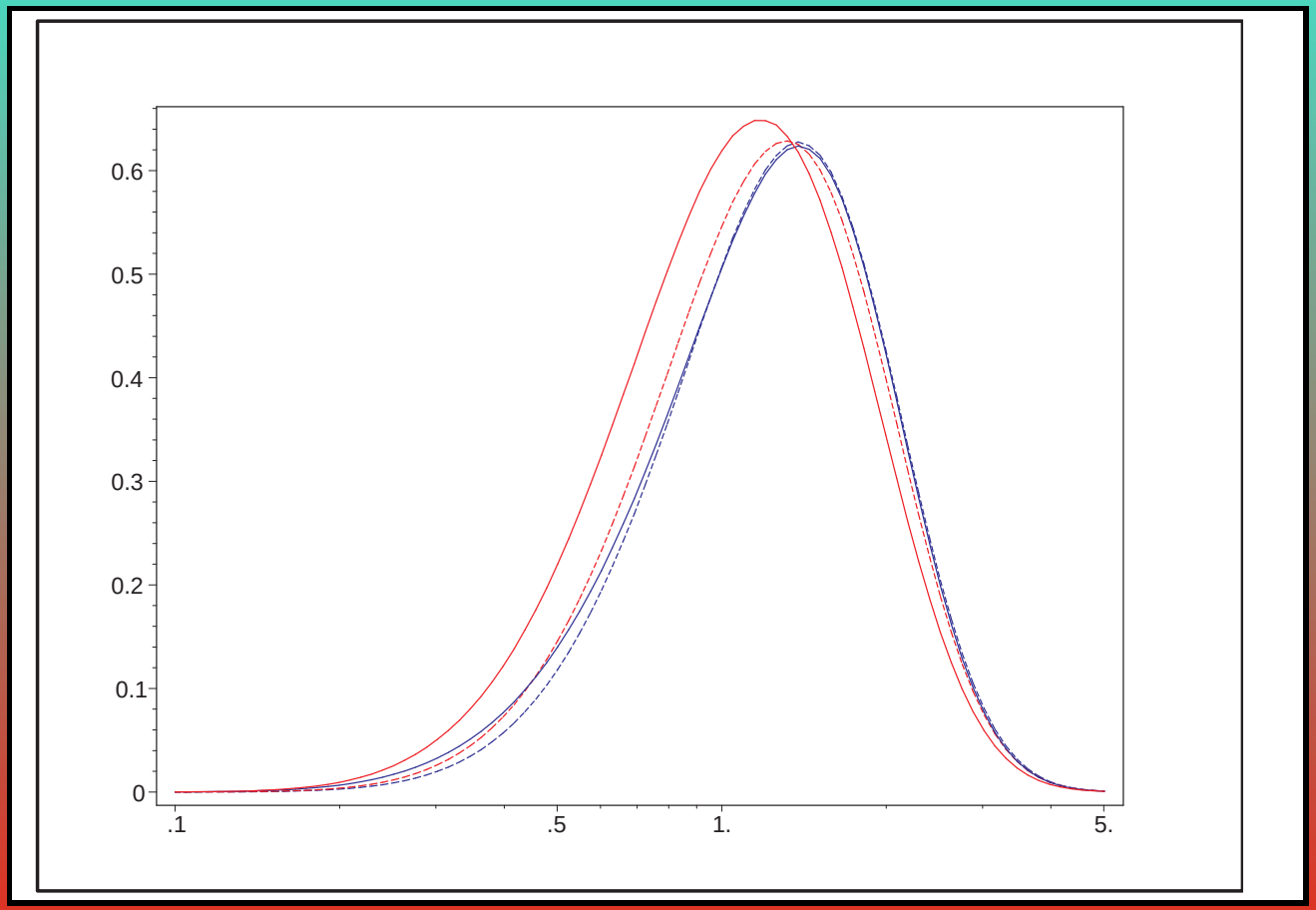
i musi być obliczane numerycznie.

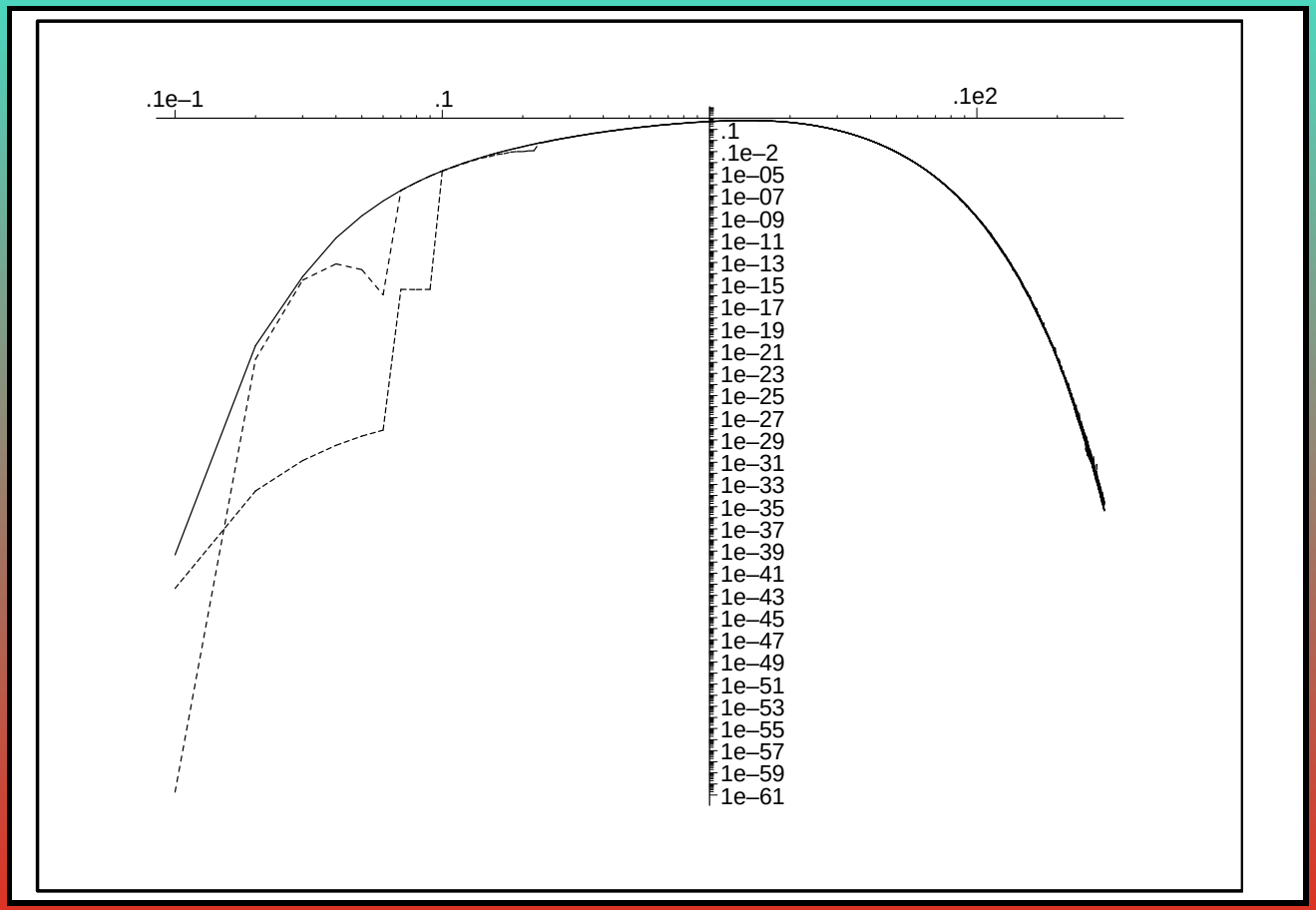


Typowe warunki w centrum przy spalaniu Si:

$$kT = 0.319 \text{ MeV}$$

$$\mu = 0.85 + m_e = 1.361 \text{ MeV}$$


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
.1
.5
1.
5.


.1e–1
.1
.1e2
.1
.1e–2
1e–05
1e–07
1e–09
1e–11
1e–13
1e–15
1e–17
1e–19
1e–21
1e–23
1e–25
1e–27
1e–29
1e–31
1e–33
1e–35
1e–37
1e–39
1e–41
1e–43
1e–45
1e–47
1e–49
1e–51
1e–53
1e–55
1e–57
1e–59
1e–61

Momenty widma neutrin i antyneutrin

Okazuje się, że momenty widma neutrinowego mogą być wyrażone przez całki Fermiego-Diraca:

$$J_1^{1,2} \equiv Q_{1,2} = \frac{Q}{2} \mp \Delta Q,$$

$$\Delta Q = \frac{{G_F}^2}{36\pi} C_V C_A \Big[4 \left(G_1^- G_{1/2}^+ - G_1^+ G_{1/2}^- \right) + 4 \left(G_0^- G_{-1/2}^+ - G_0^+ G_{-1/2}^- \right) - \left(G_1^- G_{-1/2}^+ - G_1^+ G_{-1/2}^- \right) - 7 \left(G_0^- G_{1/2}^+ - G_0^+ G_{1/2}^- \right) \Big]$$

W granicy relatywistycznej

$$Q = \frac{7\,\zeta(5)}{12\,\pi^5}\,{G_F}^2\,\left({C_V}^2 + {C_A}^2\right)(kT)^9$$

gdzie $7\zeta(5)/(12\pi^5) = 0.1925$

$$2\,\Delta Q = \left(\frac{49\,\pi^3}{8100} - \frac{45\,\zeta(3)\,\zeta(5)}{\pi^5}\right)\,{G_F}^2\,C_V\,C_A\,\mu\,(kT)^8$$

gdzie współczynnik w nawiasie wynosi 0.0043.

Wyższe momenty

$$\langle J_2 \rangle = \frac{{G_F}^2}{360\pi} \Bigg\{ ({C_V}^2 + {C_A}^2) \Big[28 \left(G^-_{3/2} G^+_{1/2} + G^+_{3/2} G^-_{1/2} \right) + 30\, G^-_1 G^+_1$$

$$- 7 \left(G^-_{3/2} G^+_{-1/2} + G^+_{3/2} G^-_{-1/2} \right) - 8 \left(G^-_{1/2} G^+_{-1/2} + G^+_{1/2} G^-_{-1/2} \right) \Big] +$$

$${C_V}^2 \Big[70 \left(G^-_{1/2} G^+_{-1/2} + G^+_{1/2} G^-_{-1/2} \right) + 60 \left(G^-_1 G^+_0 + G^+_1 G^-_0 \right) \Big]$$

$$+ 30\, ({C_V}^2 - {C_A}^2) G^+_0 G^-_0 + 16\, (3{C_V}^2 - 2{C_A}^2) G^-_{1/2} G^+_{1/2} - (34{C_V}^2 - 6{C_A}^2) G^-_{-1/2} G^+_{-1/2} \Bigg\}$$

$$\Delta J_2 = \frac{{G_F}^2}{18\pi} C_V C_A \Big[4 \left(G^-_{3/2} G^+_{1/2} - G^+_{3/2} G^-_{1/2} \right) - \left(G^-_{3/2} G^+_{-1/2} - G^+_{3/2} G^-_{-1/2} \right)$$

$$+ 6 \left(G^-_1 G^+_0 - G^+_1 G^-_0 \right) + 4 \left(G^-_{1/2} G^+_{-1/2} - G^+_{1/2} G^-_{-1/2} \right) \Big]$$

Przybliżone widmo w przypadku relatywistycznym

Znajomość momentów i kształtu widma pozwala na konstrukcję sensownego przybliżenia.

- Średnia energia ($\langle \mathcal{E} \rangle \simeq 4.11\, kT$)

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{2700}{7} \frac{\zeta(5)}{\pi^4}\, kT$$

- Odchylenie standardowe ($\sigma_{\mathcal{E}} \simeq 2.008\, kT$)

$$\sigma_{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{3}}{21\pi^4} \sqrt{217\pi^{10} - 13668750\, \zeta(5)^2}$$

- Prosta funkcja naśladująca kształt widma:

$$\phi(\mathcal{E}) \equiv \mathcal{N} \frac{\mathcal{E}^{\alpha}}{\langle \mathcal{E} \rangle^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{\alpha+1}{\langle \mathcal{E} \rangle}\, \mathcal{E} \right)$$

Widmo w przypadku relatyistycznym

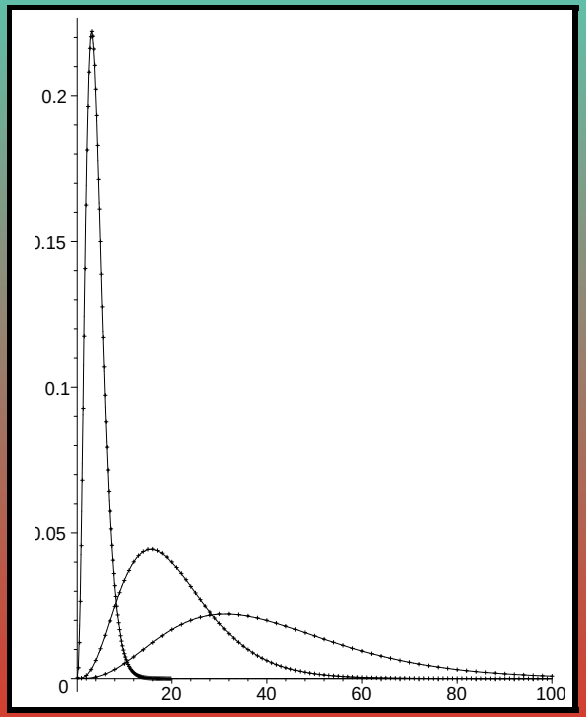
$$\phi(\mathcal{E}) = \frac{A}{kT} \left(\frac{\mathcal{E}}{kT}\right)^{\alpha} \exp\left(-a\,\mathcal{E}/kT\right)$$

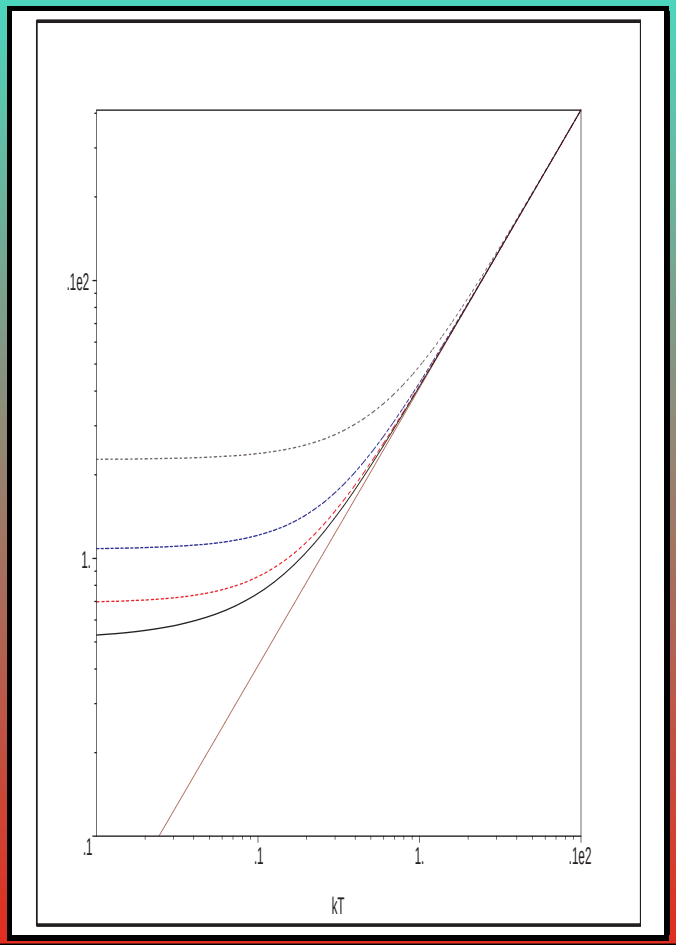
gdzie:

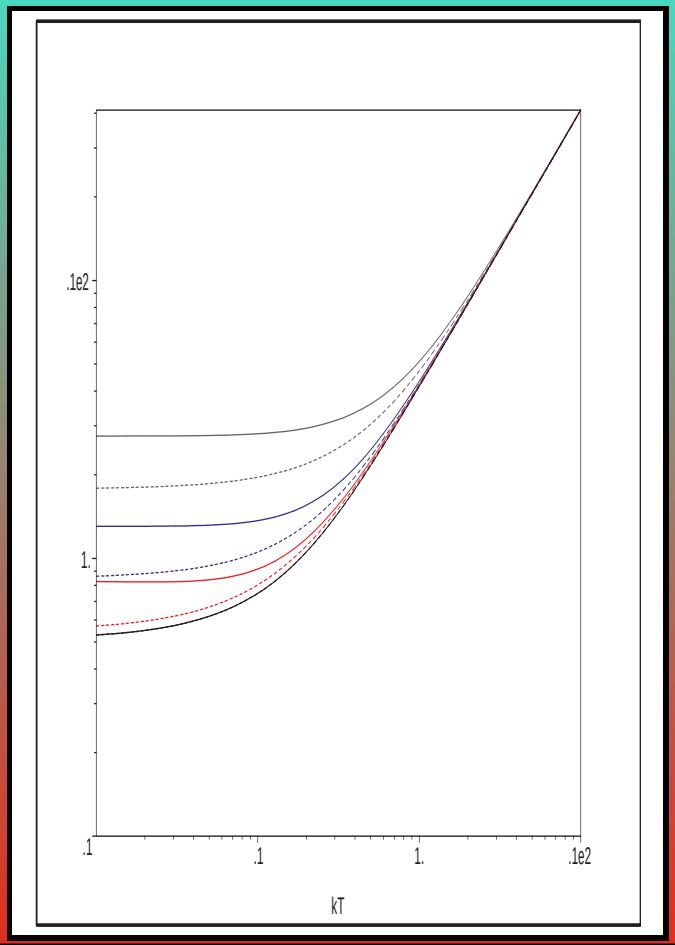
$\alpha = 3.180657028,$

$A = 0.1425776426,$

$a = 1.018192299$




.1e2
1.
.1
.1
1.
.1e2
kT


.1e2
1.
.1
.1
1.
.1e2
kT