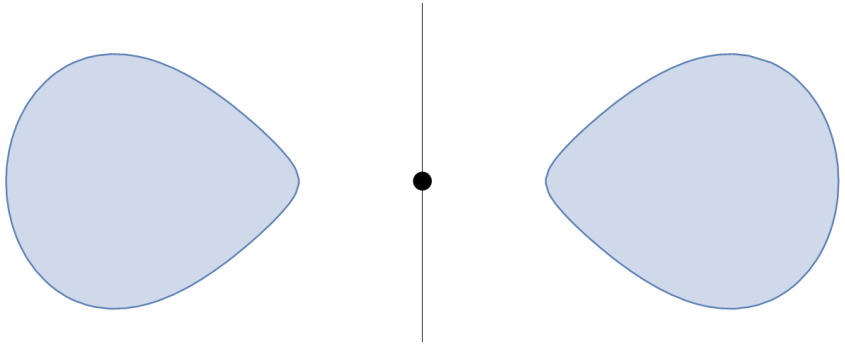
Metoda Shibaty

aspekty numeryczne

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

26 kwietnia 2017



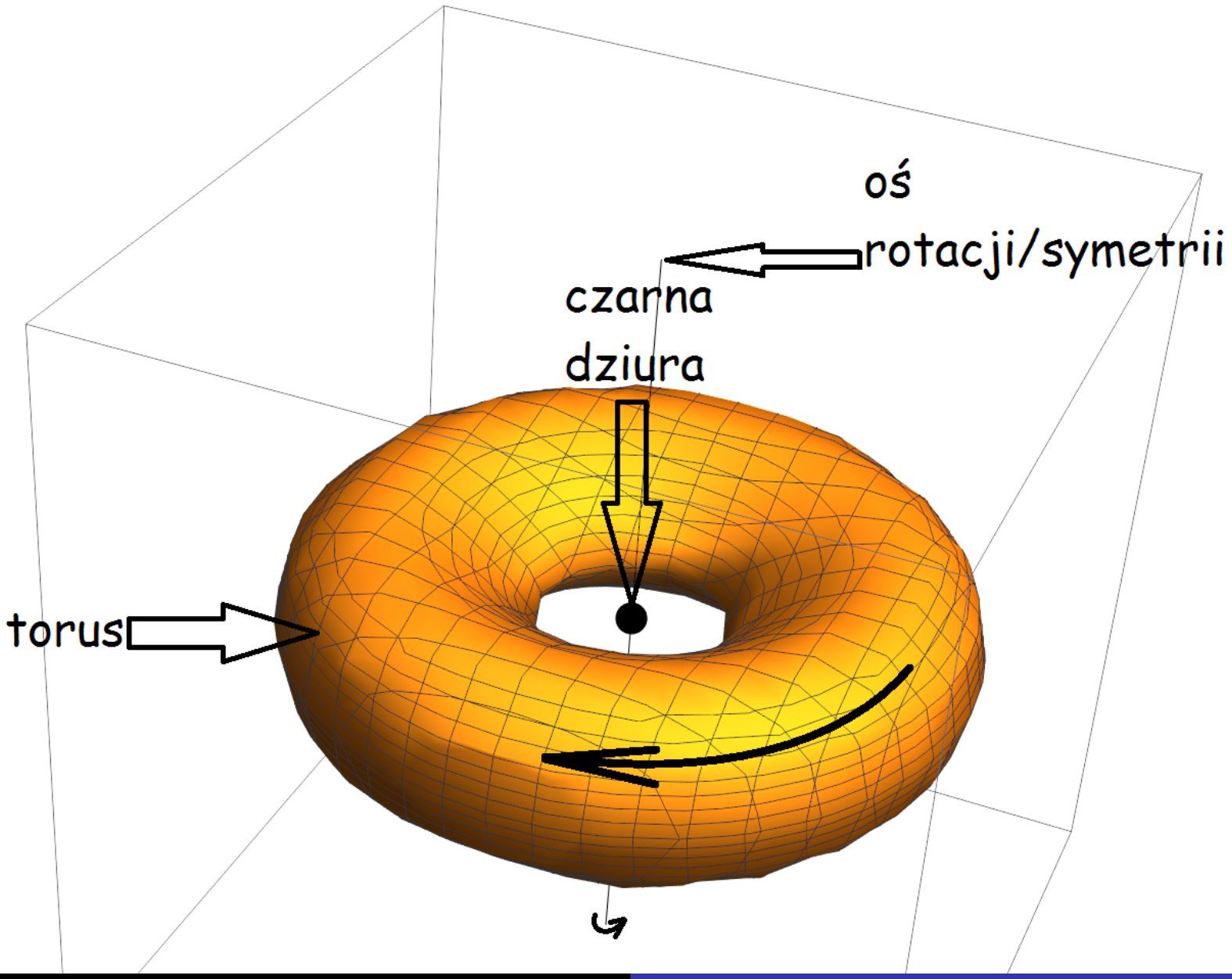
Cel referatu

Odtworzenie rezultatów i metod opisanych w pracy:
Masaru Shibata, **Rotating black hole surrounded by self-gravitating torus in the puncture framework**, Physical Reviev D, **76**, 064035 (2007)

Praca zawiera opis metody numerycznej użytej do obliczenia struktury stacjonarnego układu ***czarna dziura*** *(rotująca!) + torus (samograwitujący) w reżimie silnego pola.*

Patryk Mach, M. Piróg, W. Kulczycki, E. Malec

Szkic układu fizycznego



Metryka czasoprzestrzeni

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2(\theta)\beta^2\psi^4 - \alpha^2 & 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta)\beta\psi^4 \\ 0 & e^{2q}\psi^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2q}r^2\psi^4 & 0 \\ r^2\sin^2(\theta)\beta\psi^4 & 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta)\psi^4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \equiv \alpha(r,\theta), \beta \equiv \beta(r,\theta), q \equiv q(r,\theta), \psi \equiv \psi(r,\theta)$$

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \psi^4 \left[e^{2q}\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right) + r^2\sin^2\theta\left(\beta dt + d\varphi\right)^2 \right] \quad (1)$$

Pole prędkości i równanie stanu materii

$$U^\mu = \{u^t[r,\theta], 0, 0, u^\varphi[r,\theta]\}$$

$$U_\mu = \{u_t[r,\theta], 0, 0, u_\varphi[r,\theta]\}$$

$$U^\mu = \left\{-\frac{u_t - \beta u_\varphi}{\alpha^2}, 0, 0, \frac{u_t - \beta u_\varphi}{\alpha^2}\beta + \frac{u_\varphi}{\psi^4\ r^2 \sin^2\theta}\right\}$$

$$U_\mu = \left\{-\alpha^2 u^t + \psi^4 r^2 \sin^2\theta (u^\varphi + u^t\beta)\beta, 0, 0, \psi^4 r^2 \sin^2\theta (u^\varphi + u^t\beta)\right\}$$

$$\Omega \equiv \frac{u^\varphi}{u^t}$$

$$T_{\mu\nu} = \rho h U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad P = K\rho^\Gamma$$

W pracy Shibaty pole prędkości jest z góry związane wzorem (9) – tzw. prawo rotacji „j-const" $j(\Omega) = const$:

$$j \equiv h U_\varphi = const.$$

In the following, we assume that the torus is composed of the perfect fluid for which the energy-momentum tensor is

$$T_{\mu\nu} = \rho h u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \tag{2}$$

where ρ, h, u_μ, P, and $g_{\mu\nu}$ are the rest-mass density, specific enthalpy, four-velocity, pressure, and spacetime metric, respectively. In this paper, we adopt the polytropic equation of state (EOS)

$$P = K\rho^\Gamma, \tag{3}$$

where K and Γ are the polytropic and adiabatic constants, respectively. In this EOS, the specific internal energy ε and h are written by

$$\varepsilon = \frac{K}{\Gamma - 1}\rho^{\Gamma-1}, \tag{4}$$

$$h = 1 + \Gamma\varepsilon. \tag{5}$$

Nonzero components of the four-velocity are u^φ and u^t.

$$(\alpha u^t)^2 = 1 + \frac{u_\varphi^2}{\psi^4 r^2 \sin^2\theta}. \tag{6}$$

From u_φ, the angular velocity Ω, defined by u^φ/u^t, is derived

$$\Omega = -\beta + \frac{u_\varphi}{\psi^4 u^t r^2 \sin^2\theta}. \tag{7}$$

In stationary axisymmetric spacetime, the Euler equation is integrated to give

$$\frac{h}{u^t} + \int h u_\varphi d\Omega = C, \tag{8}$$

where C is a constant (see Appendix A for the derivation of Eq. (8) and an extension of this relation in the presence of toroidal magnetic fields). Note that Eq. (8) holds irrespective of the chosen EOS as far as the fluid is isentropic.

In this paper, we choose the constant specific angular momentum as the rotation law, namely,

$$j \equiv h u_\varphi = \text{const.} \tag{9}$$

Then, the first integral of the Euler equation is

$$\frac{h}{u^t} + j\Omega = C, \tag{10}$$

or

$$\boxed{\alpha\sqrt{h^2 + \frac{j^2}{\psi^4 r^2 \sin^2\theta}} - j\beta = C.} \tag{11}$$

Kluczowy „trik” metody Shibaty

Idea polega na rozłożeniu składowej β metryki na część pochodzącą od „czarnej dziury Kerra” β_K oraz część pochodzącą od „torusa” β_T:

$$\beta = \beta_K + \beta_T.$$

Rozkład polega na rozbiciu *pomnożonej* przez ψ^2 krzywizny zewnętrznej na część pochodzącą od metryki Kerra i pozostałą część pochodzącą od torusa.

Notacja pochodzi z serii prac Brandt&Seidel (1995) opisujących ewolucję zaburzonych czarnych dziur. Wzory Shibaty zawierają r, bo użyta zmienna radialna jest inna: $r \propto e^{\eta}$.

$$\hat{K}_{ij} = \psi^2 K_{ij}, \tag{12}$$

the momentum constraint equation of a nontrivial component (φ component) is written as

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\hat{K}_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\hat{K}_{\theta\varphi})}{\partial\theta} = 8\pi T^t_\varphi \alpha\psi^6 e^{2q}. \tag{13}$$

Because the momentum constraint is linear in $\hat{K}_{ij}$, the nonzero components may be split as

$$\hat{K}_{r\varphi} = \frac{\widehat{H}_E \sin^2\theta}{r^2} + \frac{\psi^6}{2\alpha} r^2 \sin^2\theta \partial_r \beta_{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

$$\hat{K}_{\theta\varphi} = \frac{\widehat{H}_F \sin\theta}{r} + \frac{\psi^6}{2\alpha} r^2 \sin^2\theta \partial_\theta \beta_{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

where the first term of each denotes the contribution from a rotating black hole and the second term is that from a torus. β_{T} is the shift vector associated with the torus and equal to $\beta - \beta_{\mathrm{K}}$ where β_{K} is derived from

$$\frac{\partial\beta_{\mathrm{K}}}{\partial r} = \frac{2\widehat{H}_E\alpha}{r^4\psi^6}. \tag{16}$$

$\widehat{H}_E$ and $\widehat{H}_F$ satisfy a relation derived from the momentum constraint as [23]

$$r\frac{\partial\widehat{H}_E}{\partial r}\sin^3\theta + \frac{\partial\widehat{H}_F\sin^2\theta}{\partial\theta} = 0. \tag{17}$$

Oznaczenia

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{\eta\eta} & \gamma_{\eta\theta} & \gamma_{\eta\phi} \\ \gamma_{\eta\theta} & \gamma_{\theta\theta} & \gamma_{\theta\phi} \\ \gamma_{\eta\phi} & \gamma_{\theta\phi} & \gamma_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \Psi^4 \begin{pmatrix} A & C & E\sin^2\theta \\ C & B & F\sin\theta \\ E\sin^2\theta & F\sin\theta & D\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6a}$$

$$K_{ij} = \Psi^4 H_{ij} = \Psi^4 \begin{pmatrix} H_A & H_C & H_E\sin^2\theta \\ H_C & H_B & H_F\sin\theta \\ H_E\sin^2\theta & H_F\sin\theta & H_D\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{6b}$$

Steven R. Brandt and Edward Seidel
National Center for Supercomputing Applications, University of Illinois at Urbana
Evolution of distorted rotating black holes. I. Methods and tests

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 52, NUMBER 2 15 JULY 1995

Oznaczenia

$$K_{ij} = \Psi^{-2}\hat{H}_{ij} \tag{12}$$

$$= \Psi^{-2}\begin{pmatrix} \hat{H}_A & \hat{H}_C & \hat{H}_E \sin^2\theta \\ \hat{H}_C & \hat{H}_B & \hat{H}_F \sin\theta \\ \hat{H}_E \sin^2\theta & \hat{H}_F \sin\theta & \hat{H}_D \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Steven R. Brandt and Edward Seidel
National Center for Supercomputing Applications, University of Illinois at Urbana
Evolution of distorted rotating black holes. I. Methods and tests

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 52, NUMBER 2 15 JULY 1995

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2r}{r^2-r_s^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\phi=-2\pi e^{2q}\psi^4\left[\rho_H-P+\frac{\rho h u_\varphi^2}{\psi^4 r^2\sin^2\theta}\right]-\frac{A^2}{\psi^8}-\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial b}{\partial\theta}$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{r-r_s}{r(r+r_s)}\frac{\partial b}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial b}{\partial\theta}\right]\equiv S_\phi, \tag{44}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{3r^2+r_s^2}{r(r^2-r_s^2)}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+2\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]B=16\pi B e^{2q}\psi^4 P, \tag{45}$$

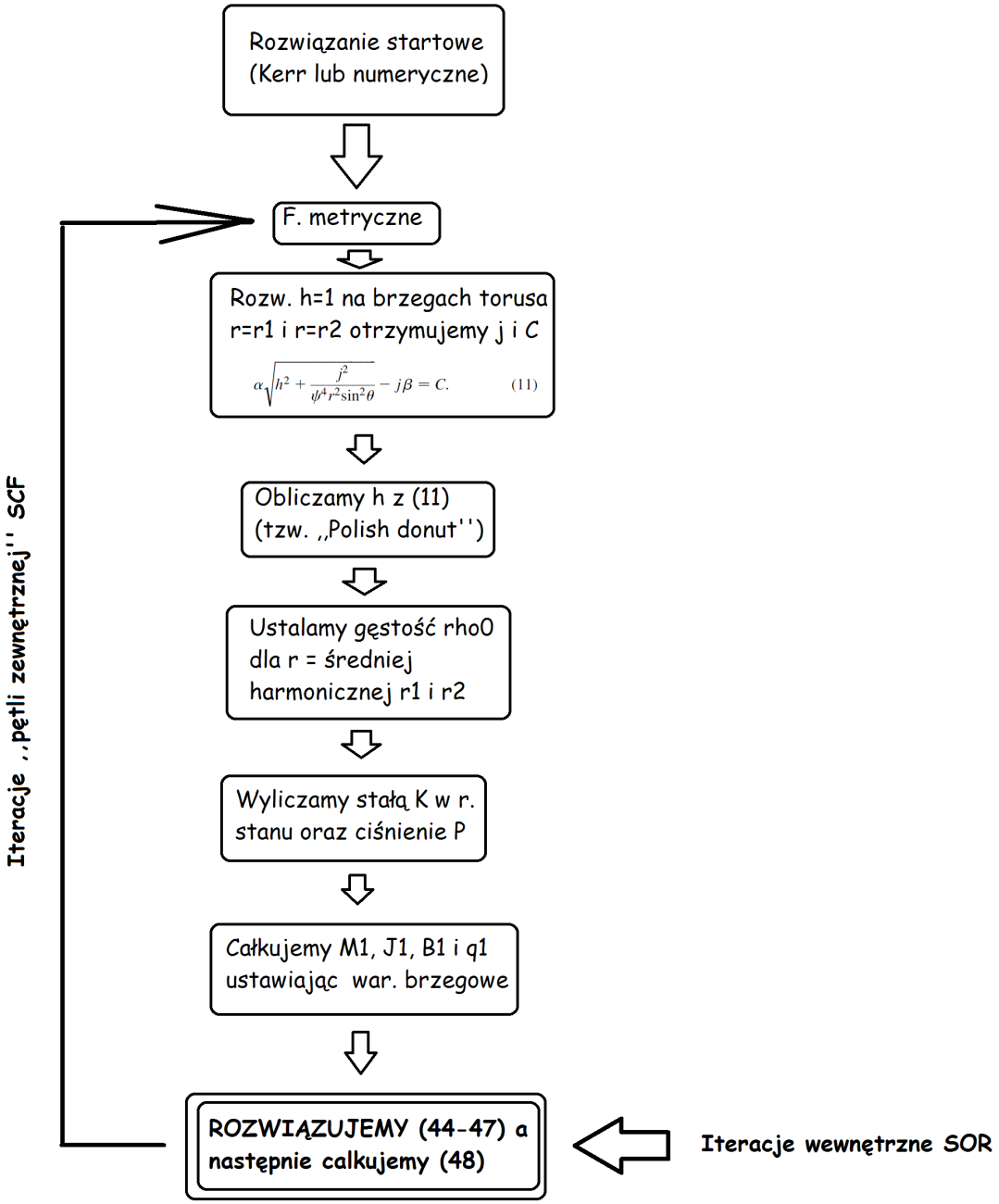
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left(\frac{4r^2-8r_s r+2r_s^2}{r(r^2-r_s^2)}+8\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{\partial b}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\left(3\cot\theta+8\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{\partial b}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right\}\right]\beta_T=\frac{16\pi\alpha e^{2q}J}{r^2\sin^2\theta}, \tag{46}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)q=-8\pi e^{2q}\left[\psi^4 P-\frac{\rho h u_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+\frac{3A^2}{\psi^8}+2\left(\frac{r-r_s}{r(r+r_s)}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)b$$
$$+\left[\frac{8r_s}{r^2-r_s^2}+4\frac{\partial(b-\phi)}{\partial r}\right]\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{4}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial(b-\phi)}{\partial\theta}\equiv S_q. \tag{47}$$

064035-4

Rozwiązanie problemu polega na **numerycznym** rozwiązywaniu 4 powyższych równań + całkowanie piątego naprzemiennie z algebraicznym równaniem (11) [całka r. Eulera].

Jest to metoda iteracyjna typu **S**elf **C**onsistent **F**ield method (SCF).


Rozwiązanie startowe
(Kerr lub numeryczne)
F. metryczne
Rozw. h=1 na brzegach torusa
r=r1 i r=r2 otrzymujemy j i C
$\alpha\sqrt{h^2+\frac{j^2}{\psi^4 r^2\sin^2\theta}}-j\beta=C.$ (11)
Obliczamy h z (11)
(tzw. ,,Polish donut'')
Ustalamy gęstość rho0
dla r = średniej
harmonicznej r1 i r2
Wyliczamy stałą K w r.
stanu oraz ciśnienie P
Całkujemy M1, J1, B1 i q1
ustawiając war. brzegowe
ROZWIĄZUJEMY (44-47) a
następnie calkujemy (48)
Iteracje wewnętrzne SOR
Iteracje ,,pętli zewnętrznej'' SCF

Ogólna postać równań (44-47)

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + a\,\frac{\partial q}{\partial r} + b\,\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} + c\,\frac{\partial q}{\partial \theta} = S_q$$

$$q = q(r,\theta), \qquad a, b, c, Sq = a, b, c, Sq\,(r, \theta, \vec{q}, \partial_r \vec{q}, \partial_\theta \vec{q})$$

Dyskretyzacja (przykład: siatka równoodległa, 3-punktowa interpolacja)

$$\frac{\partial q}{\partial r} \rightarrow \frac{q_{i+1,j} - q_{i-1,j}}{2\Delta r}, \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} \rightarrow \frac{q_{i+1,j} - 2q_{i,j} + q_{i-1,j}}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} \rightarrow \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{2\Delta \theta}, \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} \rightarrow \frac{q_{i,j+1} - 2q_{i,j} + q_{i,j-1}}{\Delta \theta^2}$$

Schemat relaksacyjny

Otrzymujemy algebraiczne równanie liniowe na $q_{i,j}$:

$$\frac{q_{i+1,j} - 2q_{i,j} + q_{i-1,j}}{\Delta r^2} + a_{i,j}\,\frac{q_{i+1,j} - q_{i-1,j}}{2\Delta r} + b_{i,j}\,\frac{q_{i,j+1} - 2q_{i,j} + q_{i,j-1}}{\Delta\theta^2} + c_{i,j}\,\frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{2\Delta\theta} = (S_q)_{i,j}$$

którego rozwiązanie definiuje schemat relaksacyjny:

$$q_{i,j} \to F\left(q_{i+1,j}, q_{i,j+1}, q_{i-1,j}, q_{i-1,j-1}, a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, (S_q)_{i,j}\right)$$

Idea metody jest prosta (std. ćw. z metod numerycznych) ale:

1. siatka nie jest równoodległa, ale geometryczna
2. rząd interpolacji 5
3. wynik nie jest z góry znany (brak rozw. symbolicznych)
4. wzory są skomplikowane, równania posprzęgane

```
q(i,j) = -(24.0d0*dt**2*f**8*(-2.0d0 + f**2)*q(-2 + i,j) + &
  &      12.0d0*dr*dt**2*f**9*(1.0d0 + f)*a(i,j)*q(-2 + i,j) - &
  &      24.0d0*dt**2*f**4*(1.0d0 + f)**3*(-2.0d0 + f - 2.0d0*f**2 + f**3)*q(-1 + i,j) &
  &      - 12.0d0*dr*dt**2*f**5*(1.0d0 + f)**3*(1.0d0 + f**2)*a(i,j)*q(-1 + i,j) - &
  &      dr**2*f**3*(1.0d0 + f)**2*(1.0d0 + f**2)*(1.0d0 + f + f**2)*b(i,j)*q(i,-2 + j) + &
  &      16.0d0*dr**2*f**3*(1.0d0 + f)**2*(1.0d0 + f**2)*(1.0d0 + f + f**2)*b(i,j)*q(i,-1 + j) + &
  &      16.0d0*dr**2*f**3*(1.0d0 + f)**2*(1.0d0 + f**2)*(1.0d0 + f + f**2)*b(i,j)*q(i,1 + j) + &
  &      dr**2*dt*f**3*(1.0d0 + f)**2*(1.0d0 + f**2)*(1.0d0 + f + f**2)*c(i,j)*(q(i,-2 + j) &
  &      - 8.0d0*q(i,-1 + j) + 8.0d0*q(i,1 + j) - q(i,2 + j)) - &
  &      dr**2*f**3*(1.0d0 + f)**2*(1.0d0 + f**2)*(1.0d0 + f + f**2)*b(i,j)*q(i,2 + j) - &
  &      24.0d0*dt**2*q(1 + i,j) - 24.0d0*dt**2*f*q(1 + i,j) + &
  &      48.0d0*dt**2*f**2*q(1 + i,j) + 96.0d0*dt**2*f**3*q(1 + i,j) + 120.0d0*dt**2*f**4*q(1 + i,j) + &
  &      120.0d0*dt**2*f**5*q(1 + i,j) + &
  &      48.0d0*dt**2*f**6*q(1 + i,j) + 12.0d0*dr*dt**2*f*(1.0d0 + f)*a(i,j)*q(1 + i,j) + &
  &      24.0d0*dr*dt**2*f**2*(1.0d0 + f)*a(i,j)*q(i+1,j) + &
  &      24.0d0*dr*dt**2*f**3*(1.0d0 + f)*a(i,j)*q(1 + i,j) + &
  &      24.0d0*dr*dt**2*f**4*(1.0d0 + f)*a(i,j)*q(1 + i,j) + &
  &      12.0d0*dr*dt**2*f**5*(1.0d0 + f)*a(i,j)*q(1 + i,j) + &
  &      24.0d0*dt**2*q(2 + i,j) - 48.0d0*dt**2*f**2*q(2 + i,j) - &
  &      12.0d0*dr*dt**2*f*(1.0d0 + f)*a(i,j)*q(2 + i,j) - &
  &      12.0d0*dr**2*dt**2*f**3*(1.0d0 + f)**2*(1.0d0 + f**2)*(1.0d0 + f + f**2)*sq(i,j))/ &
  &      (6.0d0*f*(1.0d0 + f**2)*(1.0d0 + f + f**2)*(4.0d0*dt**2*(1.0d0 - f - 5.0d0*f**2 - f**3 + f**4) &
  &      + 4.0d0*dr*dt**2*(-1.0d0 + f)*f*(1.0d0 + f)**2*a(i,j) - &
  &      5.0d0*dr**2*f**2*(1.0d0 + f)**2*b(i,j)))
```

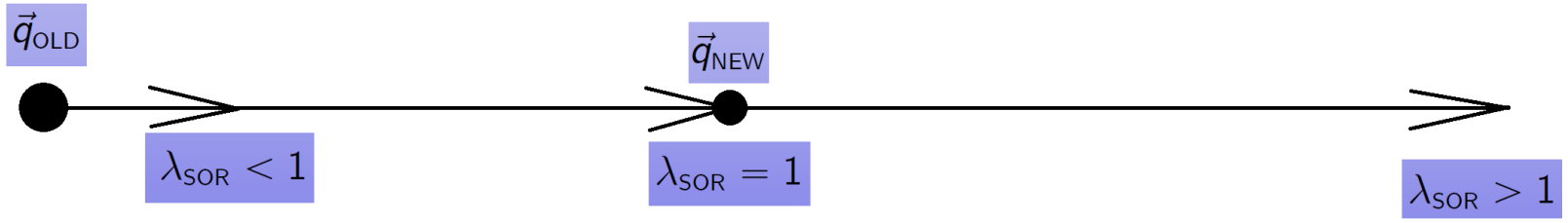
Metoda sukcesywnej nadrelaksacji

Sukcesywna

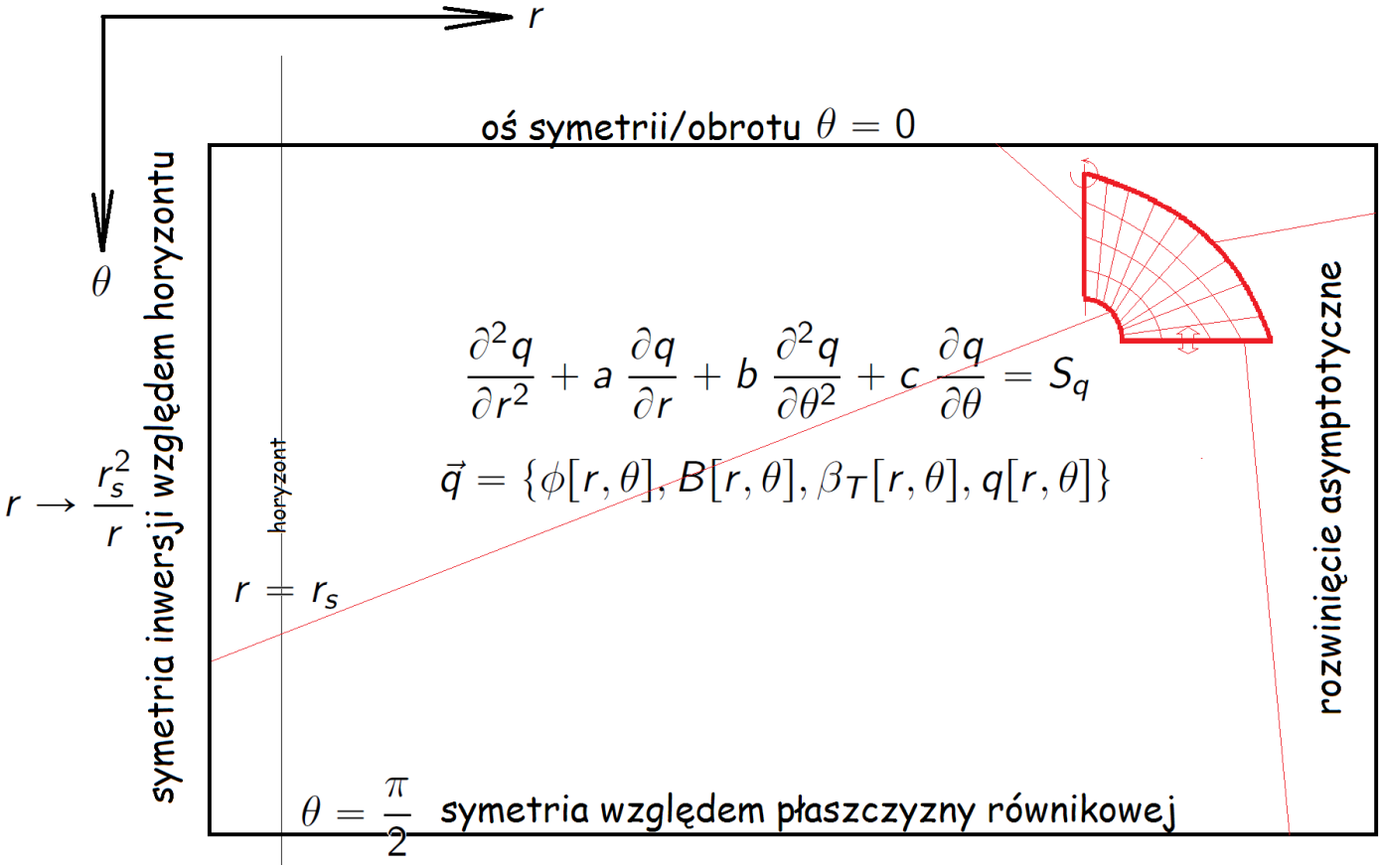
Nowo obliczone wartości $\vec{q}_{\text{NEW}}$ są używane **natychmiast**, t.j. nie czekając na zakończenie pętli po całej siatce.

Nadrelaksacja

$$\vec{q}_{\text{NEW}} = (1 - \lambda_{\text{SOR}})\vec{q}_{\text{OLD}} + \lambda_{\text{SOR}}\vec{q}_{\text{NEW}} = \vec{q}_{\text{OLD}} + \lambda_{\text{SOR}}\left(\vec{q}_{\text{NEW}} - \vec{q}_{\text{OLD}}\right)$$



Warunki brzegowe



$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + a\,\frac{\partial q}{\partial r} + b\,\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} + c\,\frac{\partial q}{\partial \theta} = S_q$$

$$\vec{q} = \{\phi[r,\theta], B[r,\theta], \beta_T[r,\theta], q[r,\theta]\}$$

$$\phi \to \frac{M_1}{2r}$$

$$B \to 1 - \frac{B_1}{r^2}$$

$$\beta_T \to -\frac{2J_1}{r^3}$$

$$q \to \frac{q_1 \sin^2\theta}{r^2}$$

Parametry fizyczne modelu ($G = c = 1$)

1. m, a — masa i spin czarnej dziury Kerra w centrum ($m = 1.0, a = 0.5$ t.j. $r_s \simeq 0.433$)
2. r_1, r_2 — wewnętrzny i zewnętrzny brzeg torusa ($r_1 = 3.5, r_2 = 15.0$)
3. $\rho_0 \left(\frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \right)$ — gęstość w pewnym punkcie wewnątrz torusa ($\rho_0 = 1.5 \times 10^{-3}$)
4. $\Gamma = 4/3$ — wykładnik politropy w równaniu stanu

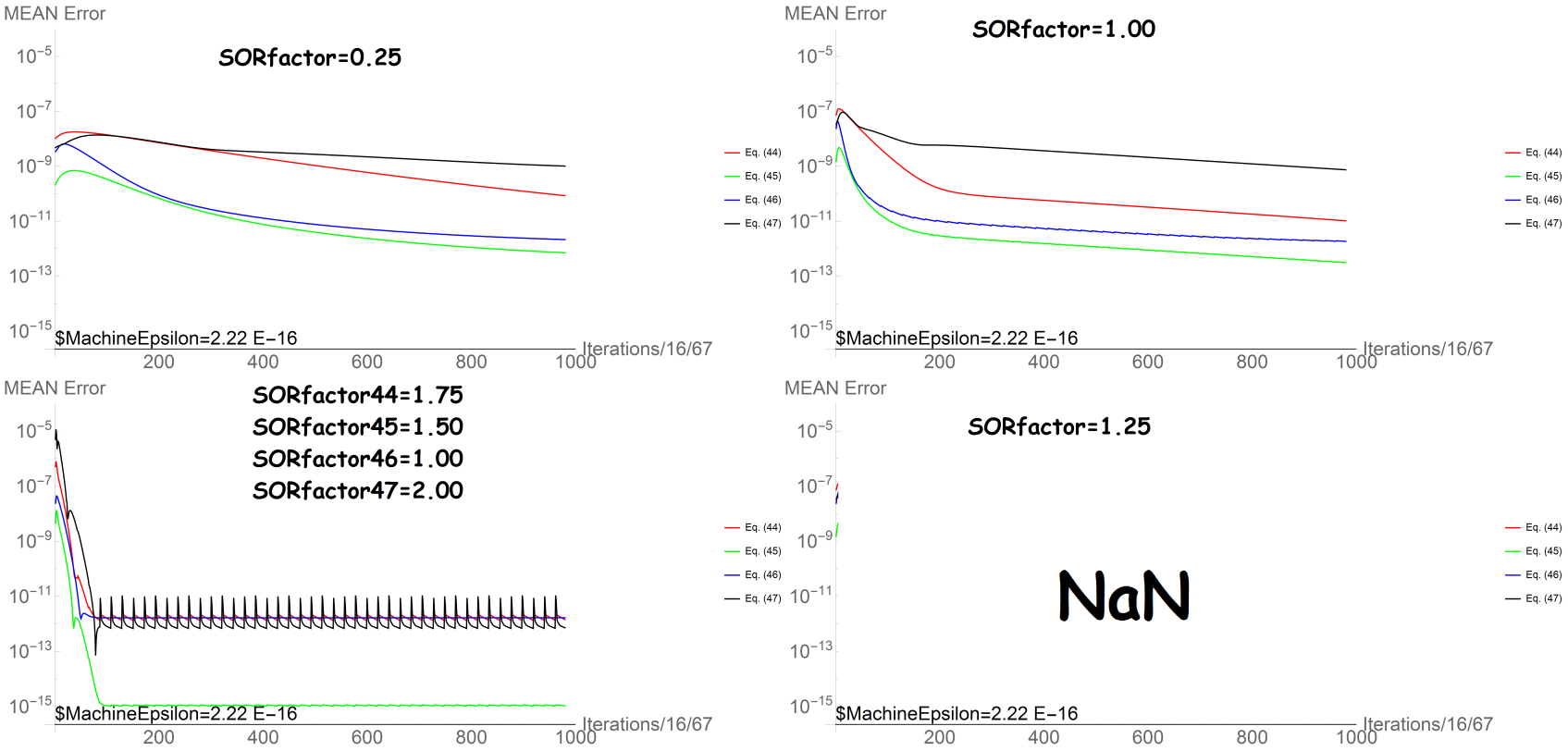
Główne parametry „informatyczne" modelu (wart. domyślne)

1. `nr, nt` — radialna i kątowa liczba punktów siatki (`nr=512, nt=256`)
2. `rOUT` — położenie zewnętrznego brzegu siatki (`rOUT = 27418.9`)
3. `niter, nSORiter` — liczba iteracji pętli zewnętrznej i wewnętrznej (`niter = 1024, nSORiter=1024`)

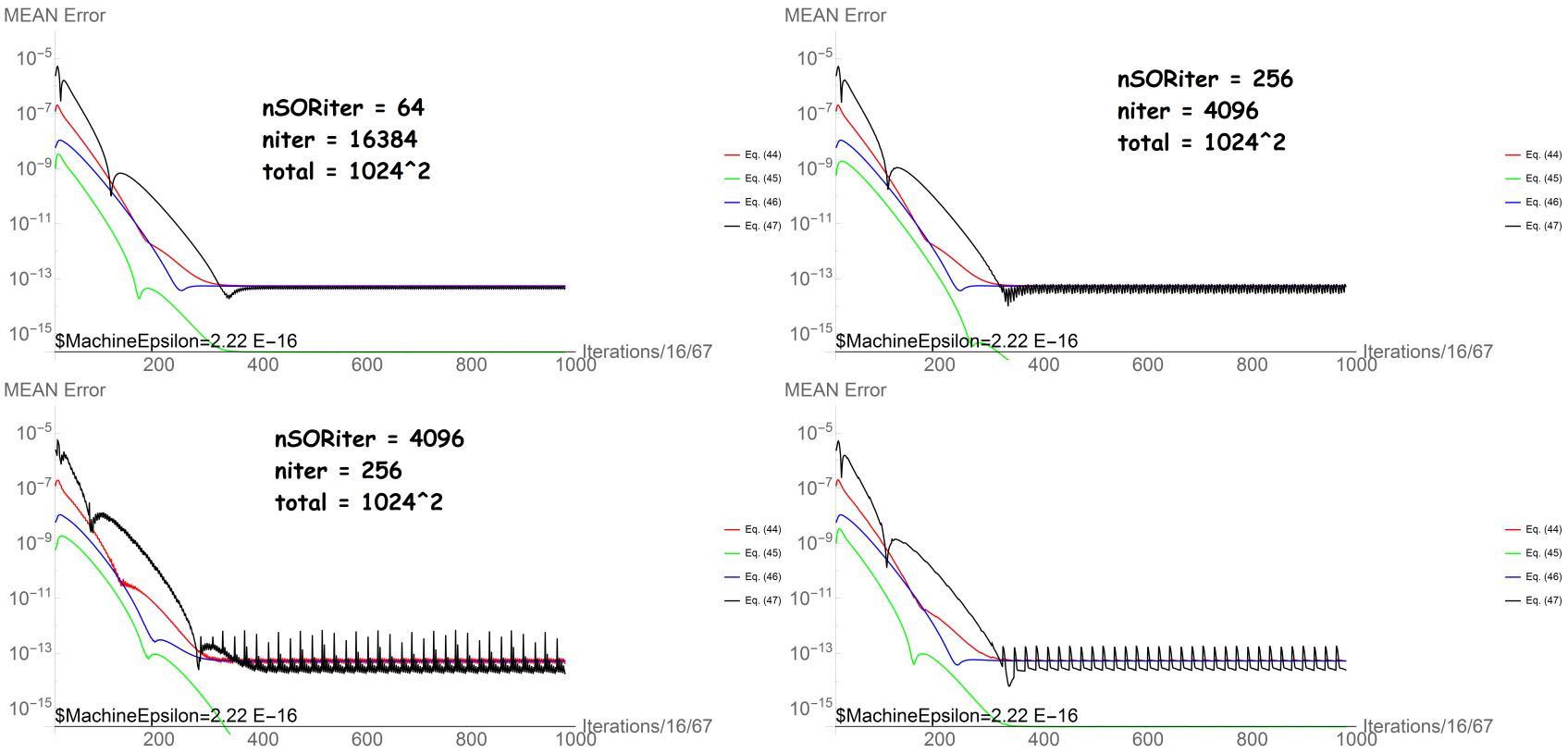
Czynniki potencjalnie decydujące o tempie zbieżności (lub rozbieżności . . .), w kolejności od najważniejszych (?)

1. współczynnik nadrelaksacji (SOR factor)
2. liczba iteracji pętli wewnętrznej i zewnętrznej (1024,1024)
3. rozdzielczość siatki $N_R \times N_T$ (512x256 lub 1024x256)
4. odleglość zewnętrznego brzegu siatki od czarnej dziury i zewnętrznego brzegu torusa
5. dobre przybliżenie zerowe
6. *rząd interpolacji przy liczeniu pochodnych (3 lub 5)*
7. *sposób rozłożenia węzłów siatki (równomierny, geometryczny, dopasowany do kwadratury,* cos *itp.)*
8. *sposób przemiatania siatki w procedurze iteracyjnej*

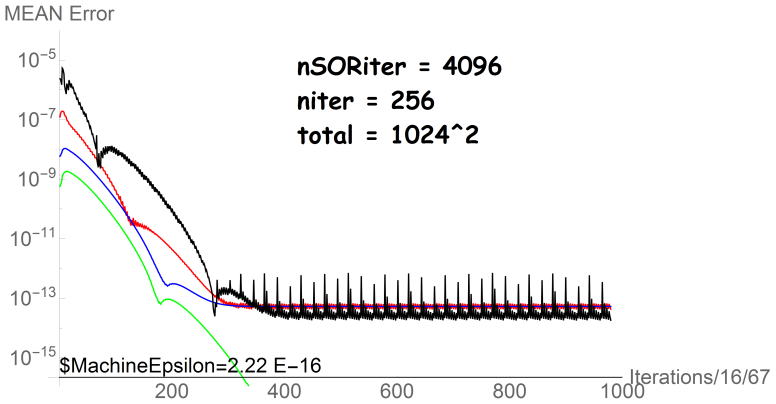
Q1: jak zbieżność zależy od współczynników nadrelaksacji?

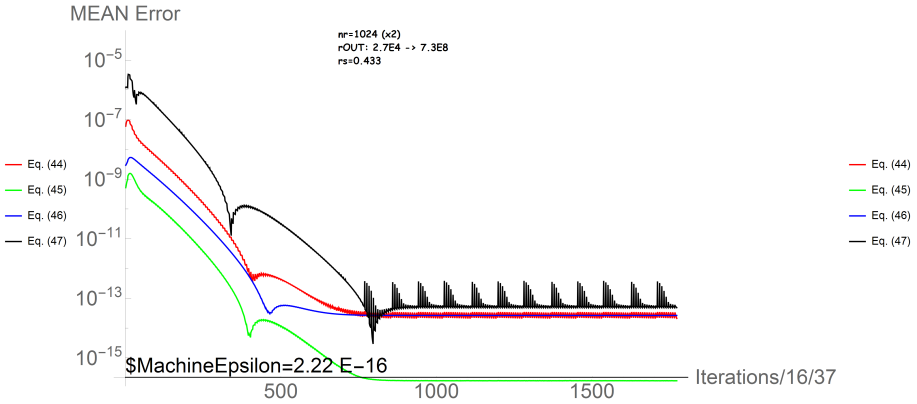


Pytanie 2: jak zbieżność zależy od stosunku liczby iteracji SOR i pętli zewnętrznej?

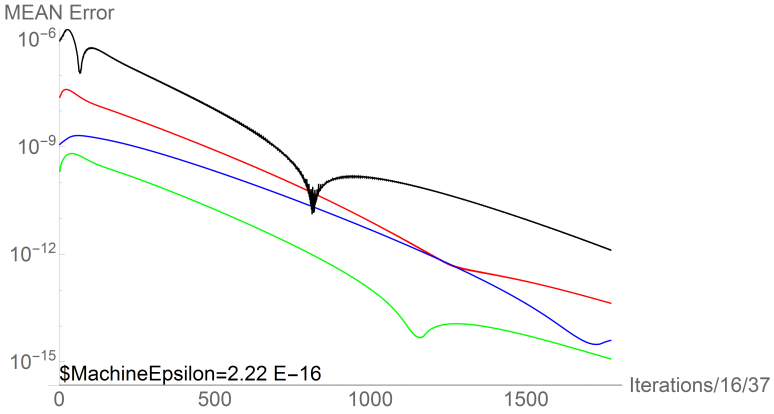


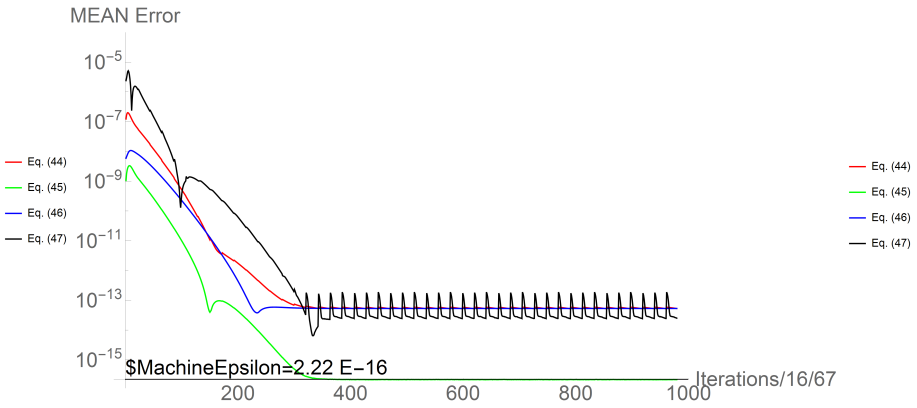
Pytanie 3: jak zbieżność zależy od odległości zewnętrznego promienia siatki?



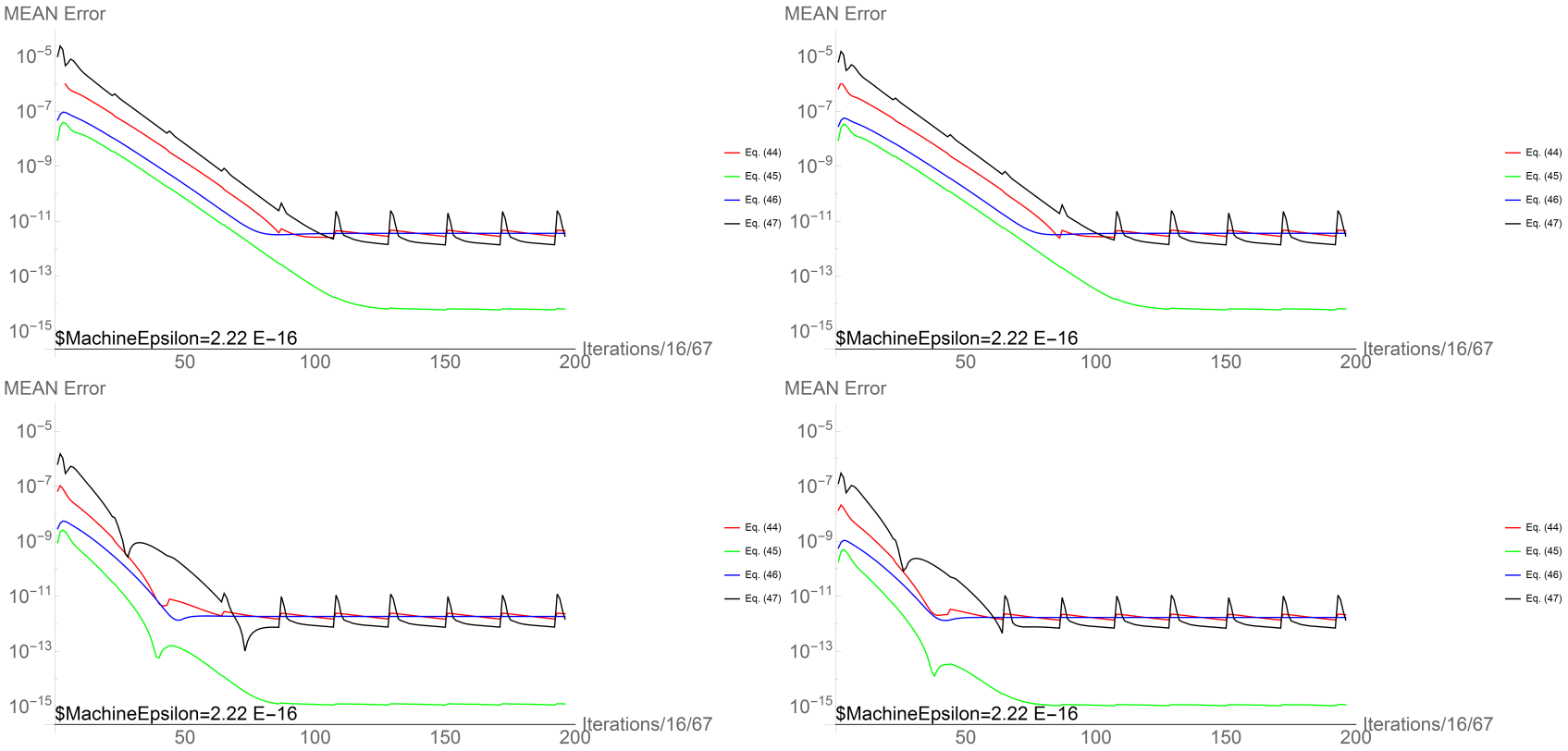
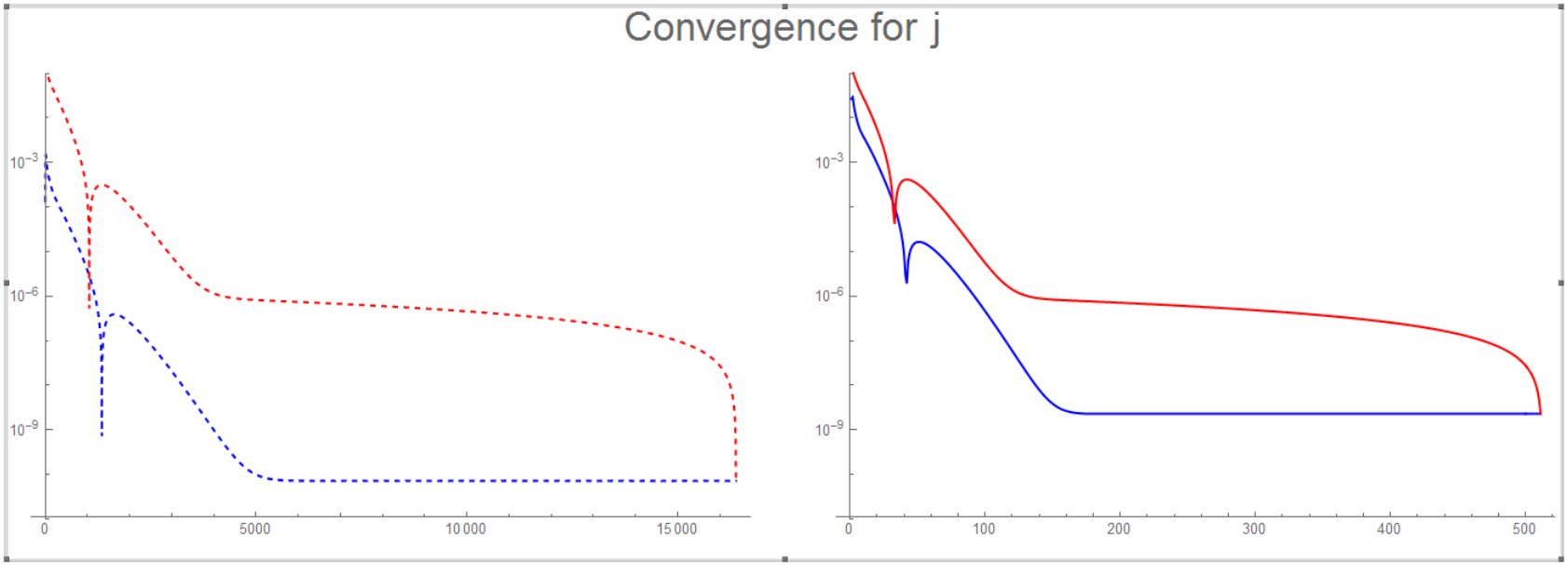


Pytanie 4: jak zbieżność zależy od rozdzielczości siatki?





Pytanie 5: jak zbieżność zależy od warunków startowych?



Zbieżność - parametry globalne