# Statyczny model kosmologicznych pustek

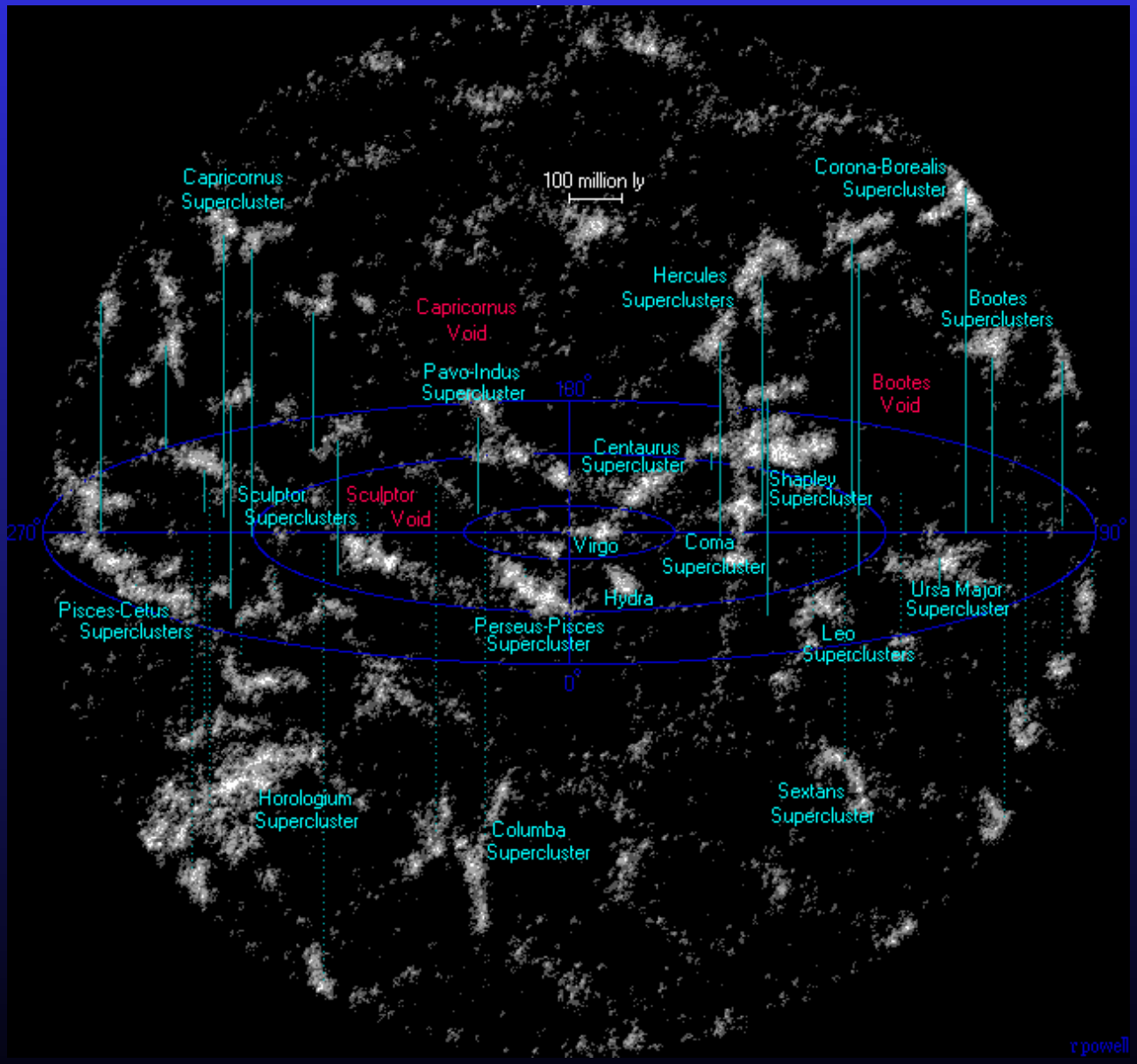
Andrzej Odrzywołek

Zakład Ogólnej Teorii Względności i Astrofizyki
Uniwersytet Jagielloński, Kraków

Sroda, 7 października 2009, 10:15

# Pustka kosmologiczna

# Pustka kosmologiczna



# Pustki kosmologiczne: garść informacji

## Odkrycie pustki Bootes

- 1981: Kirshner et. al. ApJ **248** L57 sugerują istnienie obszaru o objetości $10^6$ Mpc pozbawionego całkowicie galaktyk
- w kolejnej pracy z 1987 (ApJ **314** 493) istnienie pustki zostaje potwierdzone: *We confirm the existence of a large, roughly spherical void, of radius 62 Mpc ...*
- pustka ta pozostaje do dziś największą znaną; obecnie określa się ją jako „superpustka" (ang. *supervoid*)
- wewnątrz pustki odkryte zostały nieliczne (niespotykanego gdzie indziej typu) galaktyki
- w przypisie 3, Kirshner zaleca stosowanie nazwy „pustka" (and. *void*) pomimo, że faktycznie jest to jedynie obszar o bardzo małej gęstości; zostało to powszechnie przyjęte

# Obserwacje pustek

## Podstawowe trudności

- w pustkach, jak sama nazwa wskazuje, nie ma nic do obserwowania (poza ciemną materią i energią ...)
- jak odróżnić pustkę od statystycznej (ujemnej) fluktuacji gęstości?

## Istniejące dane obserwacyjne

- granice pustek: promień, kształt
- uśredniony profil gęstości, zależność $\rho_c$-$D$
- absorpcja światła z dalszych obiektów
- obserwacje (nielicznych) galaktyk wewnątrz pustek

# Podstawowe trudności teoretyczne

## Trudności teoretyczne

- powstanie pustki Bootes wymaga kontrastu gęstości na poziomie -0.2 dla z=1000; nie ma to odzwierciedlenia w promieniowaniu tła
- symulacje N-ciałowe CDM produkują bardzo dużą ilość małych galaktyk wewnątrz pustek; nic takiego się nie obserwuje
- oznacza to że: (1) formowanie galaktyk w pustkach zachodzi inaczej niż w pozostałej części kosmosu lub (2) pustki zostały opróżnione z materii (barionowej?) [Peebles, ApJ **557** 495 2001] (tzw. *void phenomenon*)

# Modele możliwe do użycia w przypadku pustek

## Istniejące proste modele

- symulacje N-ciałowe (newtonowskie) w układzie współporuszającym się
- modele typu Lemaitre-Tolmana (Krasiński)
- „ser szwajcarski" (sklejanie 2 rozwiązań)

Modele te opisują pustkę jako kombinowany skutek ekspansji przestrzeni i formowania się struktur. Skoro gdzieś materia kolapsuje i kontrast gęstości rośnie, to gdzie indziej musi on spadać. Pustka jest w tym obrazie raczej skutkiem ubocznym (pasywnym elementem) formowania się struktur niż pełnoprawnym obiektem.

**Jest to oczywiste podejście, ponieważ grawitacja w klasycznej OTW jest zawsze przyciągająca.**

# Pustki dla $\Lambda > 0$

## Model dla dodatniej stałej kosmologicznej

- pustka nigdy nie jest „pusta”, zawiera „ciemną energię”
- istnieją rozwiązania statyczne
- $\Lambda$ może powodować, że pustka odpycha cząstki próbne *nawet jeżeli sama jest statyczna*
- pustka jest pełnoprawnym obiektem, podobnie jak np. gromada galaktyk; wpływa na otoczenie wyrzucając materię na zewnątrz

# Wyprowadzenie równań statycznej pustki

Wychodzimy od równania Tolmana-Oppenheimera-Volkova ze stałą kosmologiczną (TOV-$\Lambda$).

$$\frac{dp}{dr} = -G\,\frac{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\left(m + 4\pi r^3\,\frac{p}{c^2} - \frac{1}{3}\,\frac{r^3\Lambda c^2}{G}\right)}{r^2\,\left(1 - \frac{2\,Gm}{c^2 r} - \frac{1}{3}\,r^2\Lambda\right)} \tag{1a}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{1b}$$

$$p = K\,\rho^{\gamma}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n} \tag{1c}$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej

$$x = A\,r,$$

i funkcji:

$$\rho(r) = \rho_c\,\theta(x)^n, \tag{2a}$$

$$p(r) = p_c\,\theta(x)^{n+1}, \tag{2b}$$

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_c}{A^3}\,v(x). \tag{2c}$$

$$A^2 = \frac{4\pi G\rho_c}{\alpha c^2}, \quad \lambda = \frac{\Lambda}{3\,A^2}, \quad \alpha = \frac{p_c}{\rho_c c^2}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}.$$

dostajemy:

$$\theta' + \frac{(1+\alpha\theta)(v + \alpha x^3\,\theta^{n+1} - \lambda\,x^3/\alpha)}{x^2 - 2\alpha\,x\,v - \lambda\,x^4} = 0 \tag{3a}$$

$$v' = x^2\,\theta^n \tag{3b}$$

# Równania Toopera z $\Lambda$

$$\theta' + \frac{(1+\alpha\theta)(v + \alpha x^3\,\theta^{n+1} - \lambda\, x^3/\alpha)}{x^2 - 2\alpha\, x\, v - \lambda\, x^4} = 0, \quad v' = x^2\,\theta^n$$

**$\lambda = 0$ (równania Toopera)**

$$\theta' + \frac{(1+\alpha\,\theta)(v + \alpha\, x^3\,\theta^{n+1})}{x^2 - 2\alpha\, x\, v} = 0, \qquad v' = x^2\,\theta^n$$

**$\lambda = 0$ i $\alpha \to 0$ (równanie Lane-Emdena)**

$$\theta'' + \frac{2}{x}\,\theta' + \theta^n = 0$$

**$\lambda \to 0$ i $\alpha \to 0$ ale $\lambda/\alpha$=const (równanie pustki)**

$$\theta'' + \frac{2}{x}\,\theta' + \theta^n = q^n$$

# Równanie pustki

## Interpretacja fizyczna limitu $\lambda \to 0$ i $\alpha \to 0$, $\lambda/\alpha$=p

1. W przypadku $\Lambda > 0$ granica Newtonowska jest rozbieżna, gdyż zmniejszanie prędkości i „sił" grawitacyjnych musi w pewnym momencie doprowadzić do sytuacji, w której stała kosmologiczna zdominuje dynamikę.
2. z drugiej strony, dla bardzo dużych odległości rzędu $r \sim 1/\sqrt{\Lambda}$ pojawia się horyzont kosmologiczny
3. limit opisuje więc sytuację, gdy małe gęstości materii powodują istotny wkład $\Lambda$ do oddziaływania, ale rozmiary obiektu są zaniedbywalnie małe w stosunku do „promienia" statycznego wszechświata Einsteina
4. siła newtonowska i pochodząca od $\Lambda$ zrównują się dla 2 atomów wodoru w odległości 1 metra; promień Einsteina wynosi dla $\Lambda c^2/G = 7 \times 10^{-27} kg$ około 15 Gpc $\sim$ 250 $R_{void}$

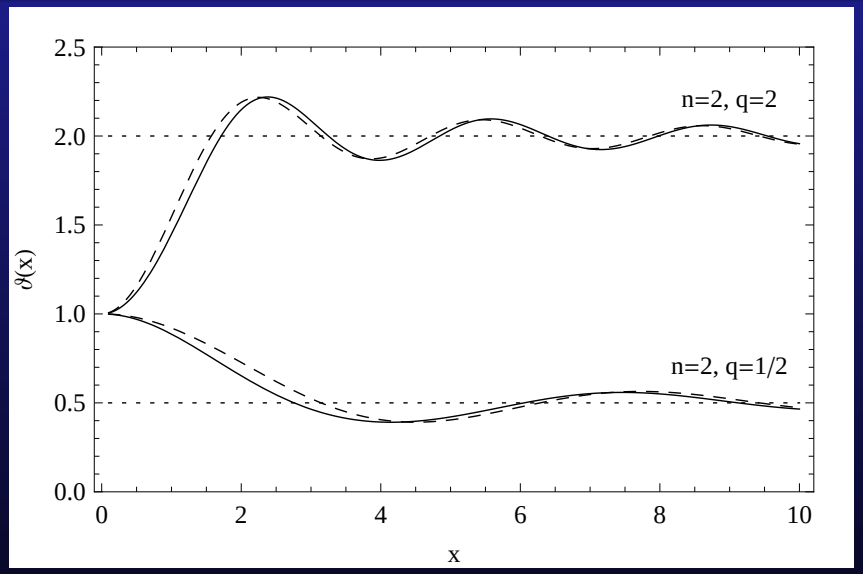
# Równanie pustki vs Lane-Emden

| Równanie „pustki” | Równanie Lane-Emdena |
|---|---|
| $\vartheta'' + \frac{2}{x}\,\vartheta' + \vartheta^n = q^n$ | $\theta'' + \frac{2}{x}\,\theta' + \theta^n = 0$ |
| $x \ll 1$ | |
| $\vartheta \simeq 1 - \frac{1-q^n}{6}\,x^2 + \ldots$ | $\theta \simeq 1 - \frac{1}{6}\,x^2 + \ldots$ |
| $x \gg 1$ | |
| $\vartheta \sim q - \frac{a \sin kx}{x}, \quad k^2 = n\,q^{n-1}$ | zależnie od $n$ |
| brak skalowania | $\theta \to x^\lambda \theta(x/\lambda), \quad \lambda = \frac{2}{1-n}$ |

# Rozwiązanie równania „pustki”

## Numeryka vs rozwinięcie asymptotyczne

Równanie można rozwiązać numerycznie. Okazuje się, że nie jest to wcale potrzebne: *rozwinięcie asymptotyczne daje bardzo dobry wynik przybliżony już od* $x = 0$*!*




$$\vartheta(x) \simeq q - (q-1)\,\frac{\sin k\,x}{k\,x}$$

$$k^2 = n\,q^{n-1}$$

# Zastosowania kosmologiczno-astrofizyczne modelu

1. parametryzacja kontrastu gęstości w pustce:

$$1 + \frac{\delta\rho}{\rho} = \left(\frac{\vartheta(Ax)}{q}\right)^n$$

   zawierająca 3 parametry: $Ak, q$ i $n$.

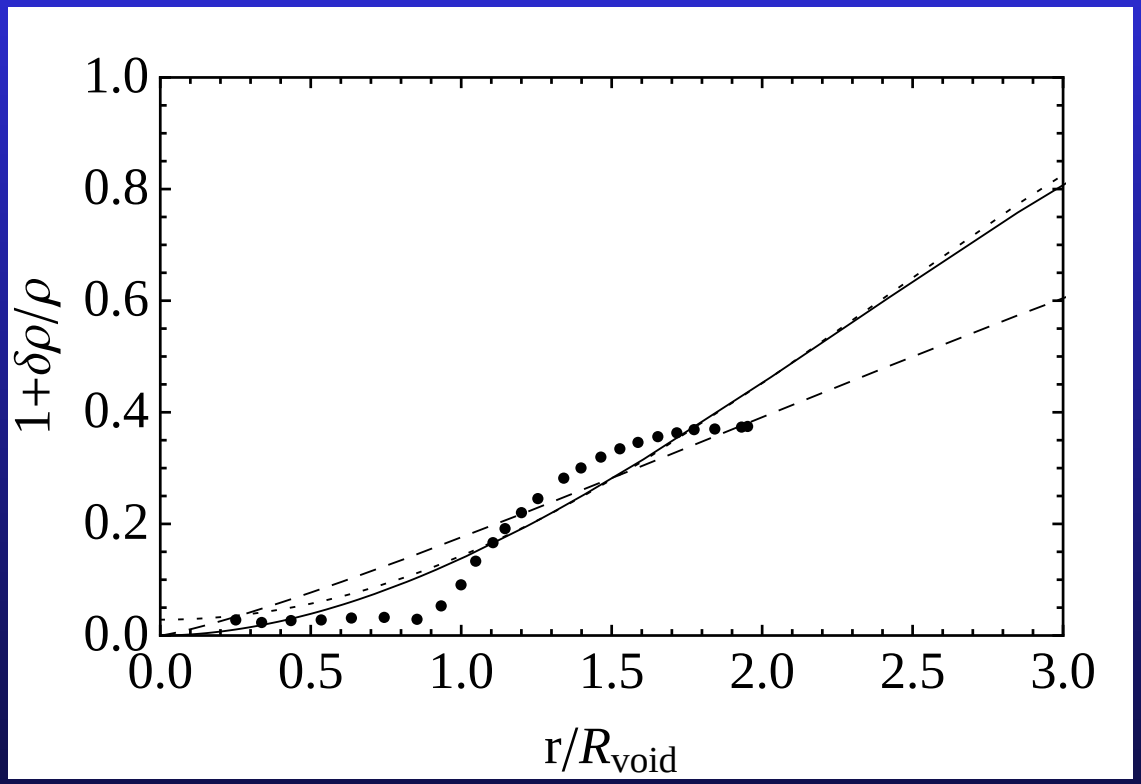
2. zależność promienia pustki od kontrastu gęstości w centrum:

$$R_{void} = \frac{\pi}{\sqrt{n}A}\,\delta\rho_c^{1-\gamma/2} = \frac{\pi}{\sqrt{n}A}\,\delta\rho_c^{\frac{n-1}{2n}}$$

3. pewne modelowe równanie naśladujące ewolucję zaburzeń gęstości w obecności $\Lambda$:

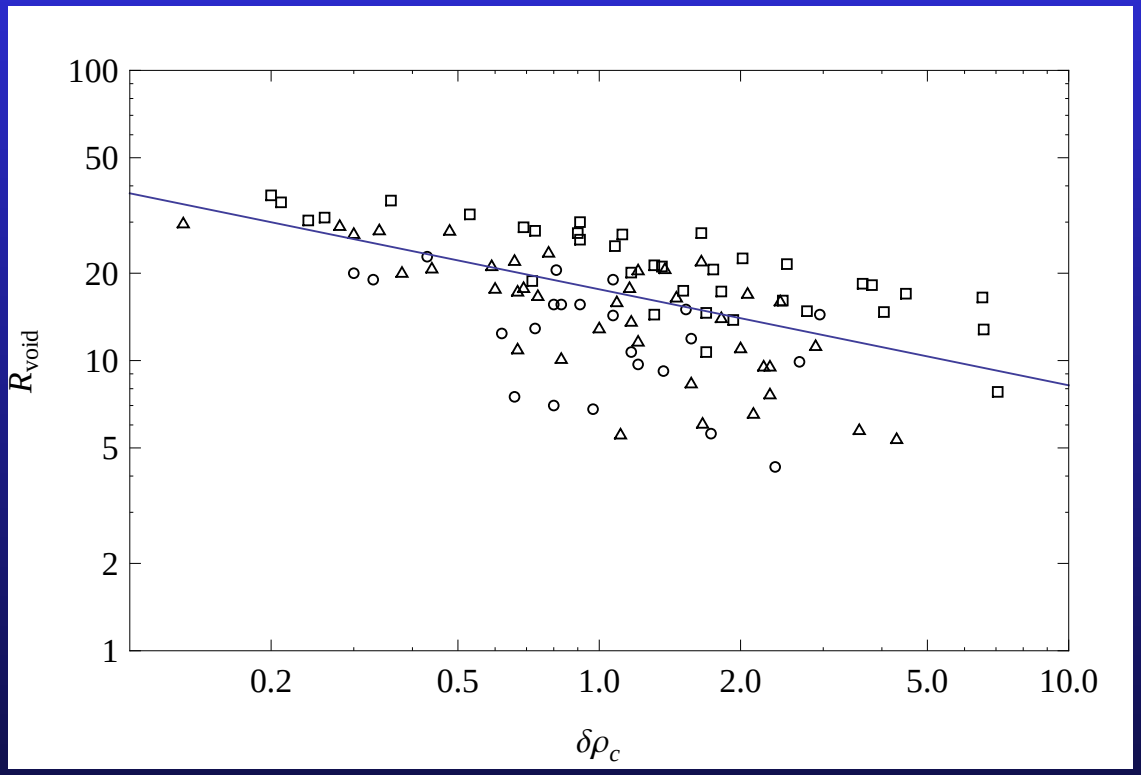
$$\partial_t u = \Delta u + u^n - q^n$$

# Radialny profil kontrastu gęstości w pustce




$$n = 3/5, \quad n = 0.9 \pm 0.2, \quad n = 1.05 \pm 0.2$$

# Zależność promienia pustki od gęstości centralnej




$$\gamma = 2.66 \pm 0.07, \quad n = 0.60 \pm 0.025$$

# Ewolucja zaburzeń gęstości

## Zaburzenia liniowe $u = q + \phi$

1. $\partial_t u = \Delta u + u^n - q^n, \quad u \to q + \phi, \quad \phi \ll q$
2. $\partial_t \phi = \Delta \phi + n\, q^{n-1} \phi,\ k^2 = n\, q^{n-1}$
3. równanie ewolucji małych zaburzeń na tle $u = q$:

$$\partial_t \phi = \Delta \phi + k^2 \phi$$

4. transformata Fouriera $x \to \omega$, $\phi \to \hat{\phi}$:

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\omega^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi}$$

5. $$\hat{\phi} = c(\omega)\, e^{(k^2 - \omega^2)t}$$

# Ewolucja zaburzenia gaussowskiego

$$\phi_{t=0} = e^{-(x/x_0)^2}$$

$$\phi(x,t) = \frac{e^{k^2 t}}{\sqrt{1+4t/x_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2+4t}\right)$$

Ponieważ $\partial_t \phi(0,t) = k^2 - 2/x_0^2$, to dla zaburzeń o skali mniejszej niż $x_0 < \sqrt{2}/k$ ich amplituda początkowo maleje.

Ostatecznie, dla $t > \frac{2-k^2 x_0^2}{4k^2}$ amplituda zaburzenia zaczyna wzrastać. Skala zaburzenia rośnie monotonicznie z $t$.

[Manipulator $\rightarrow$ *Mathematica*]

# Wnioski

1. stała kosmologiczna jakościowo zmienia obraz pustek i formowania się struktur w ich rejonie
2. pustki nie wyglądają na obiekty statyczne, ale taka mozliwość istnieje w teorii
3. model statyczny pozwala na ścisłe rachunki dotyczące m. in. równania stanu materii wypełniajacej pustkę
4. proste uogólnienie modelu statycznego polegające na dodaniu pochodnej czasowej prowadzi do interesującego równania pozwalającego zrozumieć ewolucję zaburzeń na statycznym tle w obecności $\Lambda$
5. w przybliżeniu liniowym okazuje się, że zaburzenia w małych skalach są tłumione, natomiast w dużych rosną
6. tłumaczy to tzw. *void phenomenon*, czyli brak galaktyk wewnątrz pustek - zagadkowy fakt sprzeczny z modelem CDM