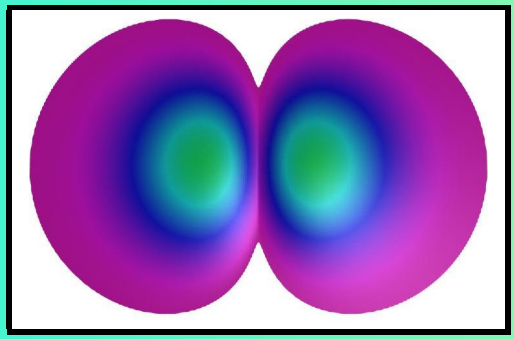
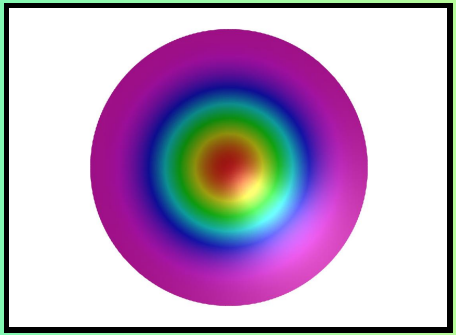
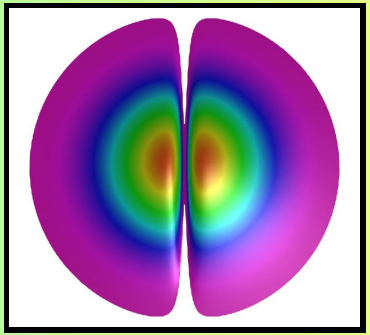
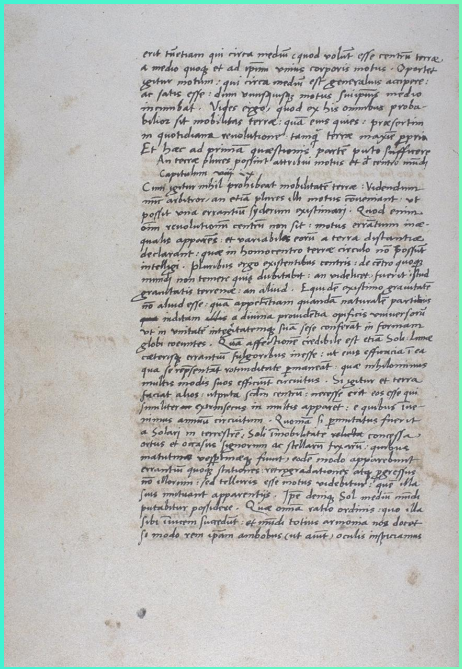
A. Odrzywołek (IFUJ, 2004)

Structure of differentially rotating barotropes

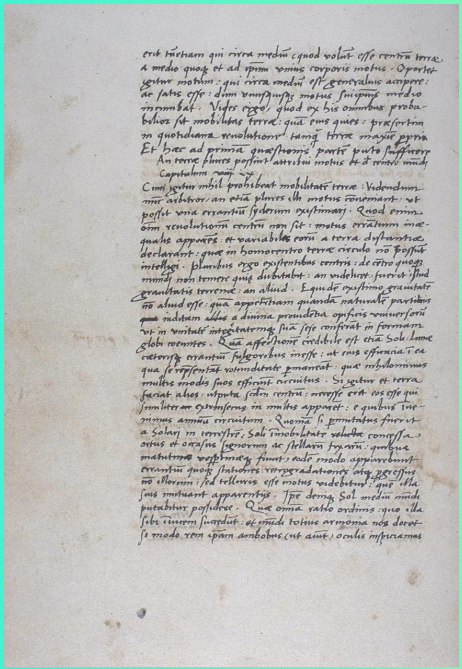
Praca doktorska napisana pod kierunkiem
Prof. dr hab. Marka Kutschery

Mikołaj Kopernik *„**De Revolutionibus**”, Księga I, Rozdział IX:*



Mikołaj Kopernik *„**De Revolutionibus**”, Księga I, Rozdział IX:*



"Ja w każdym razie mniemam, że ciężkość nie jest niczym innym, jak tylko naturalną dążnością, którą boska opatrzność Stwórcy wszechświata nadała częściom po to, żeby łączyły się w jedność i całość, skupiając razem w kształt kuli. A jest rzeczą godną wiary, że taka dążność istnieje również w Słońcu, Księżycu i innych świecących planetach, po to, by na skutek jej działania trwały w tej krągłości..."

Co fizyka teoretyczna zawdzięcza badaniom nad rotującymi ciałami?

- Równania Eulera (1755)
- Potencjał grawitacyjny, wielomiany Legendere'a (1773-93)
- R. Lapalace'a, harmoniki sferyczne (1825)
- R. Poissona (1825)
- Idea spontanicznego łamania symetrii (Jacobi, 1834)

DEFINICJA ROTUJĄCEJ BAROTROPY:

1. Barotropowe równanie stanu: $p = p(\rho)$
2. Cylindryczna (czysta) rotacja: $\Omega = \Omega(r)$
3. Newtonowska grawitacja: $\Phi_g = \Phi_g(\rho)$
4. Symetria osiowa $\rho = \rho(r, z)$ i równikowa $\rho(r, z) = \rho(r, -z)$

DEFINICJA ROTUJĄCEJ BAROTROPY:

1. Barotropowe równanie stanu: $p = p(\rho)$
2. Cylindryczna (czysta) rotacja: $\Omega = \Omega(r)$
3. Newtonowska grawitacja: $\Phi_g = \Phi_g(\rho)$
4. Symetria osiowa $\rho = \rho(r, z)$ i równikowa $\rho(r, z) = \rho(r, -z)$

> As far as I am aware, no single problem, not even a stability problem, has been solved in a differentially rotating self-gravitating medium. Even without magnetic fields, and even linearizing the equations, it is very hard to make progress.
>
> *Prendergast 1962, p.318*

PODSTAWOWE RÓWNANIE ROTUJĄCEJ „GWIAZDY”

h - entalpia $\nabla h = \nabla p / \rho$,
Φ_c - potencjał odśrodkowy:

$$h(\rho) + \Phi_g + \Phi_c = C$$

$$\Phi_c = \int_0^r r\ \Omega(r)^2\ dr$$

PODSTAWOWE RÓWNANIE ROTUJĄCEJ „GWIAZDY”

h - entalpia $\nabla h = \nabla p/\rho$,
Φ_c - potencjał odśrodkowy:

$$h(\rho) + \Phi_g + \Phi_c = C$$

$$\Phi_c = \int_0^r r\,\Omega(r)^2\,dr$$

$$\Delta\Phi_g = 4\pi \mathrm{G}\rho$$

PODSTAWOWE RÓWNANIE ROTUJĄCEJ „GWIAZDY”

h - entalpia $\nabla h = \nabla p/\rho$,
Φ_c - potencjał odśrodkowy:

$$h(\rho) + \Phi_g + \Phi_c = C$$

$$\Phi_c = \int_0^r r\,\Omega(r)^2\,dr$$

$$\Delta\Phi_g = 4\pi \mathrm{G}\rho$$

$$\Phi_g = -\mathrm{G}\int \frac{\rho\,dV}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

METODY ROZWIĄZYWANIA

Metody numeryczne:

1. HSCF - metoda samouzgodniona (Hachisu, 1986)
2. Równanie całkowe na sieci (Eriguchi&Müller, 1985)
3. EFGH - równanie eliptyczne $\rightarrow$ r. hiperboliczne (Fukushima *et. al.*,1980)

Metody analityczne:

1. Obliczenia ścisłe – dla $\Omega = const$ i $\rho = const$.
2. Obliczenia przybliżone – dla $\Omega = const$, $\rho \neq const$.

METODY ROZWIĄZYWANIA

Metody numeryczne:

1. HSCF - metoda samouzgodniona (Hachisu, 1986)
2. Równanie całkowe na sieci (Eriguchi&Müller, 1985)
3. EFGH - równanie eliptyczne $\rightarrow$ r. hiperboliczne (Fukushima *et. al.*,1980)

Metody analityczne:

1. Obliczenia ścisłe – dla $\Omega = const$ i $\rho = const$.
2. Obliczenia przybliżone – dla $\Omega = const$, $\rho \neq const$.

Nie istnieją metody analityczne dla $\Omega \neq const$ i $\rho \neq const$!

PODSTAWOWE TRUDNOŚCI

- Kształt powierzchni nieznany
  - niemożliwe sformułowanie warunków brzegowych
- Niejasna rola stałej C
- Wybór właściwej funkcji niewiadomej: $\rho, \Phi_g, h, \ldots$
- Wybór odpowiedniej funkcji ,,zerowego'' rzędu
- Wybór właściwej kolejności iteracji
- W trakcie iteracji $\rho \to 0$

PODSTAWOWE TRUDNOŚCI

- Kształt powierzchni nieznany
  - niemożliwe sformułowanie warunków brzegowych
- Niejasna rola stałej C
- Wybór właściwej funkcji niewiadomej: $\rho, \Phi_g, h, \ldots$
- Wybór odpowiedniej funkcji ,,zerowego'' rzędu
- Wybór właściwej kolejności iteracji
- W trakcie iteracji $\rho \to 0$

Każda trudność zawiera w sobie zalążek rozwiązania...

RÓWNANIE CAŁKOWE

$$h(\rho) - 4G \iint\limits_{A} \theta\left(\rho(r', z')\right) \frac{\rho(r', z')\, r' E(ik)}{\sqrt{(r'-r)^2 + (z'-z)^2}}\, dz'\, dr' + \Phi_c = C$$

RÓWNANIE CAŁKOWE

$$h(\rho) - 4G \iint\limits_A \theta\left(\rho(r', z')\right) \frac{\rho(r', z')\, r' E(ik)}{\sqrt{(r'-r)^2 + (z'-z)^2}}\, dz'\, dr' + \Phi_c = C$$

Zdefiniujmy: $f = C - \Phi_c - h, \quad F(f) = h^{-1}(C - \Phi_c - f)$

Równanie całkowe

$$h(\rho) - 4G \iint\limits_A \theta\left(\rho(r', z')\right) \frac{\rho(r', z')\, r' E(ik)}{\sqrt{(r'-r)^2 + (z'-z)^2}}\, dz'\, dr' + \Phi_c = C$$

Zdefiniujmy: $f = C - \Phi_c - h, \quad F(f) = h^{-1}(C - \Phi_c - f)$

Postać kanoniczna

$$f = \mathcal{R}\left[F(f)\right]$$

Rozwiązanie przybliżone

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \mathcal{R}[F(f_0)], \\
f_2 &= \mathcal{R}[F(f_1)], \\
&\dots \\
f_n &= \mathcal{R}[F(f_{n-1})] \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie przybliżone

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \mathcal{R}[F(f_0)], \\
f_2 &= \mathcal{R}[F(f_1)], \\
&\dots \\
f_n &= \mathcal{R}[F(f_{n-1})] \\
&\dots
\end{aligned}
\qquad \longrightarrow \qquad h(\rho_1) = -\mathcal{R}(\rho_0) - \Phi_c + C
$$

Rozwiązanie przybliżone

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathcal{R}[F(f_0)], \\ f_2 &= \mathcal{R}[F(f_1)], \\ &\dots \\ f_n &= \mathcal{R}[F(f_{n-1})] \\ &\dots \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad h(\rho_1) = -\mathcal{R}(\rho_0) - \Phi_c + C$$

niech ρ_0 będzie rokładem gęstości dla $\Phi_c \equiv 0$:

$$h(\rho_0) + \mathcal{R}(\rho_0) = C_0$$

Rozwiązanie przybliżone

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathcal{R}[F(f_0)], \\ f_2 &= \mathcal{R}[F(f_1)], \\ &\dots \\ f_n &= \mathcal{R}[F(f_{n-1})] \\ &\dots \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad h(\rho_1) = -\mathcal{R}(\rho_0) - \Phi_c + C$$

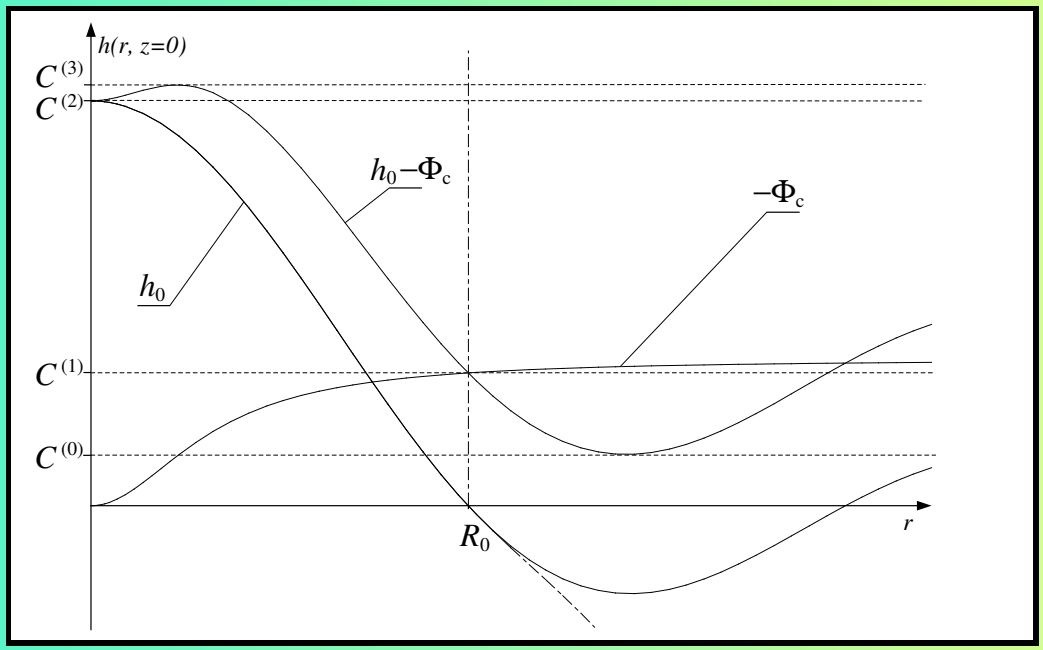
niech ρ_0 będzie rokładem gęstości dla $\Phi_c \equiv 0$:

$$h(\rho_0) + \mathcal{R}(\rho_0) = C_0$$

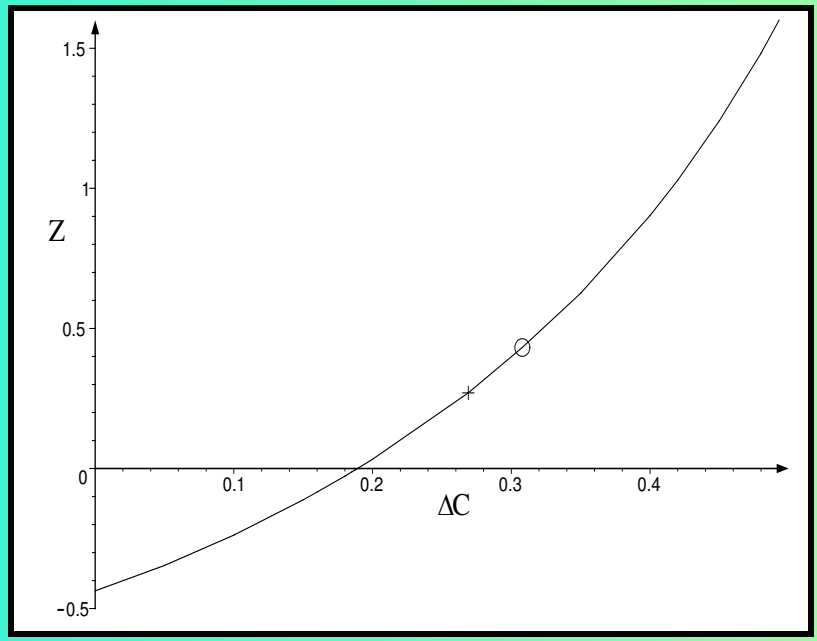
całkowanie niepotrzebne!

$$\boxed{h(\rho_1) = h(\rho_0) - \Phi_c + C - C_0}$$

$$h_1 = h_0 - \Phi_c - \Delta C$$



TWIERDZENIE WIRIALNE



$$\Delta C = -\Phi_c(R_0) \quad (\circ)$$

$$\Delta C = \widehat{-\Phi_c} \quad (\times)$$

$$Z = \frac{2\,E_k - |E_g| + 3\int p\,dV}{|E_g|}$$

CEL: EWOLUCJA ROTUJĄCEJ GWIAZDY

Podejście I	Podejście II
Rodzina sferoidalnych powierzchni	**Kontury stałej masy wyliczone**
Opis rotacji poprzez $j(m)$	Opis rotacji poprzez Φ_c
Rotacja podlega ewolucji	Rotacja założona z góry
Pełny opis materii w gwieździe	Barotropowe równanie stanu
Rotacja ,,powłokowa'' (*shellular*)	Rotacja cylindryczna
Brak równowagi hydrostatycznej	**Pełna równowaga hydrostatyczna**

$\star$

KONWENCJE ZWIĄZANE Z CAŁKAMI ELIPTYCZNYMI

Niezupełna całka eliptyczna pierwszego rodzaju:

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\,\sin^2\psi}},\qquad \text{ale:}\qquad F(\phi|m)=\int_0^{\phi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-m\,\sin^2\psi}}$$

m – moduł *(modulus)*, k – parametr *(parameter)*, $\boxed{m=k^2}$

Zupełna całka eliptyczna pierwszego rodzaju:

$$E(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right),\qquad \text{ale:}\qquad E(m)=F\left(\frac{\pi}{2}\middle|m\right)$$

czyli $E(k)\neq E(m)$! W szczególności: $E(m{=}{-p})=E(k{=}ip)$.

ELIPSOIDY DEDEKINDA I RIEMANNA

- 1856-57 L. Dirichlet
- 1860 R. Dedekind
- 1861 B. Riemann

Pole prędkości $\mathbf{v}$ (v_x, v_y, v_z): $v_x = -q\,\zeta\,y$, $v_y = (1-q)\,\zeta\,x$, $v_z = 0$,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{v} = \zeta\,\mathbf{e}_z}$$

Równanie elipsoidy:

$$\boxed{G(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0}$$

Wektor normalny: $\boxed{\mathbf{n} = \nabla G = (2\,x/a^2, 2\,y/b^2, 2\,z/c^2)}$

Warunek, że ciecz „nie wypływa” z elipsoidy, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, daje:

$$q = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \qquad 1 - q = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczy”– linii prądu:

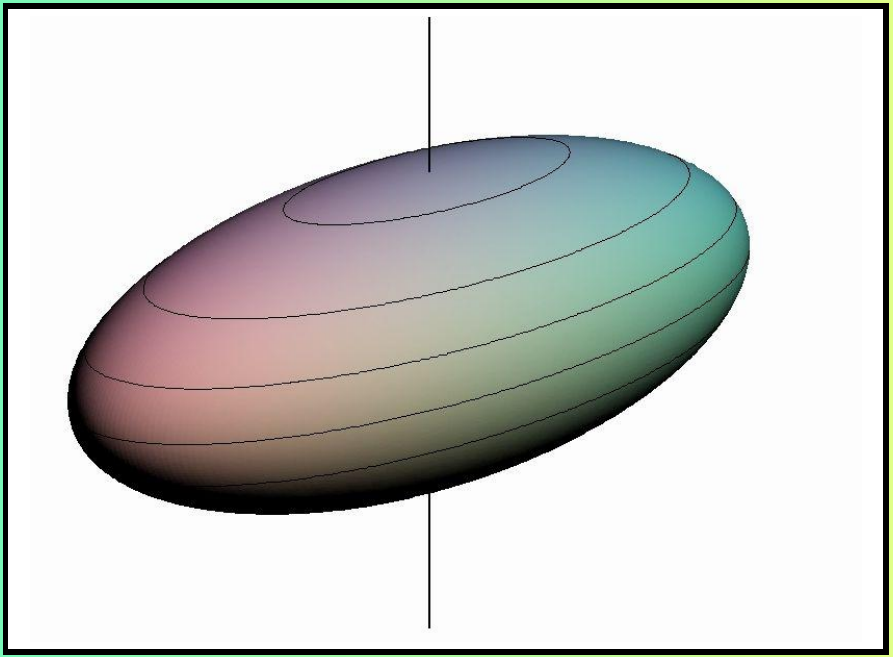
$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -q\,\zeta\,y \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = (1-q)\,\zeta\,x \end{aligned}$$

Podstawiamy: $x = A\,e^{i\Omega t}, \qquad y = B\,e^{i\Omega t}$:

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q\,\zeta \\ (1-q)\,\zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

Otrzymujemy związek pomiędzy wirowością ζ **elipsoidy Dedekinda** a prędkością kątową Ω ***elipsoidy Jacobiego:***

$$\zeta = \frac{a^2 + b^2}{a\,b}\,\Omega$$



KSZTAŁT ZIEMI

Zdefiniujmy: $m = F_c/\widehat{F_g}$ – stosunek siły odśrodkowej na równiku do średniej siły przyciągania grawitacyjnego, e – mimośród przekroju południkowego.
I. NEWTON (1687): $\frac{e}{m} = \frac{5}{4}$
CH. HUYGENS (1690): $\frac{e}{m} = \frac{1}{2}$
A.-C. CLAIRAUT (*Theorie de la figure de la terre*, 1743):

$$\frac{e}{m} = \frac{5}{2\left[2 + \eta(a_s)\right]}$$

Dla $\rho = const, \eta(a_s) = 0$, dla masy skoncentrowanej w $r = 0, \eta(a_s) = 3$.

TOROIDALNY ZAPŁON BIAŁEGO KARŁA

Pierwsza poprawka:

$$h_1 = h_c\, w_{4/3}(\lambda r) - \Phi_c(r) + \Delta C$$

w centrum:

$$w_n(x) \simeq 1 - \frac{1}{6}\, x^2 + \frac{n}{120}\, x^4 + \ldots, \qquad \Phi_c \simeq -\frac{1}{2}\Omega_0^2\, r^2 + \ldots$$

w tym przyliżeniu:

$$h_1(r) = h_c + \left(\Omega_0^2 - \frac{4}{3}\pi G \rho_c\right)\, r^2 + \ldots$$

Jeżeli $\Omega_0^2 > \frac{4}{3}\pi G \rho_c$ to $\rho_c < \rho_{max}$!

Gęstość zapłonu białego karła $\rho_c \simeq 2 \cdot 10^9$ daje $\Omega_0 \sim 25$ rad/s.
Heger & Langer 2000:

$$\Omega_0(\mathrm{Fe}) > 30 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_0(\mathrm{He}) \sim 10^{-3} \text{ rad/s}$$

ROTUJĄCE BAROTROPY W OTW

$$ds^2 = (e^\nu)^2\ dt^2 - (e^\mu)^2 \left(dr^2 + r^2\ d\theta^2\right) - (e^\psi)^2 \left(\omega\ dt - d\phi\right)^2$$

gdzie ν, μ, ψ, ω to funkcje r i θ.
Czteroprędkość: $u^\alpha = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}} \left[1, 0, 0, \Omega\right]$, $v \equiv |\mathbf{v}| = e^{\psi-\nu}\ (\Omega - \omega)$.
Równanie stanu: $p = p(\varepsilon)$; entalpia: $\nabla h = \nabla p/(\varepsilon + p)$

$$\nabla h + \nabla \nu + \nabla \ln \sqrt{1 - v^2} + \frac{v^2}{1 - v^2}\ \nabla \Omega/(\Omega - \omega) = 0$$