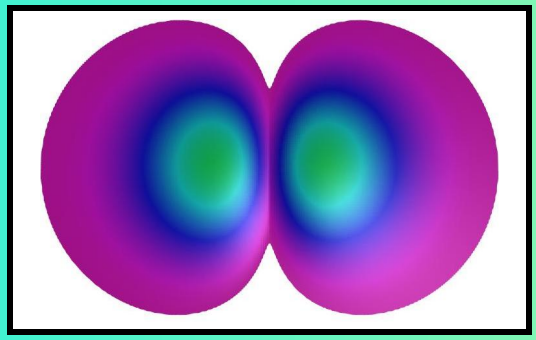
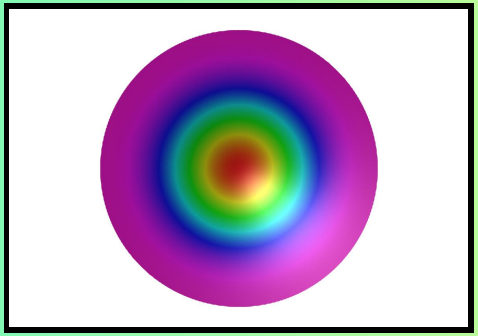
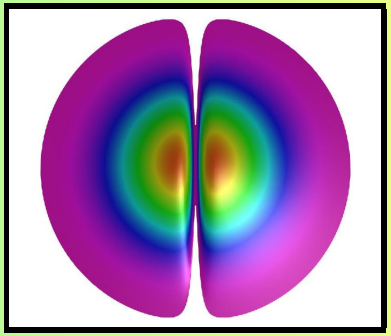
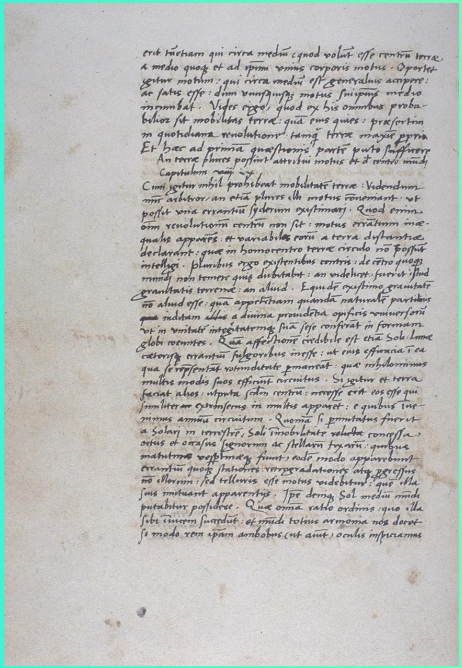
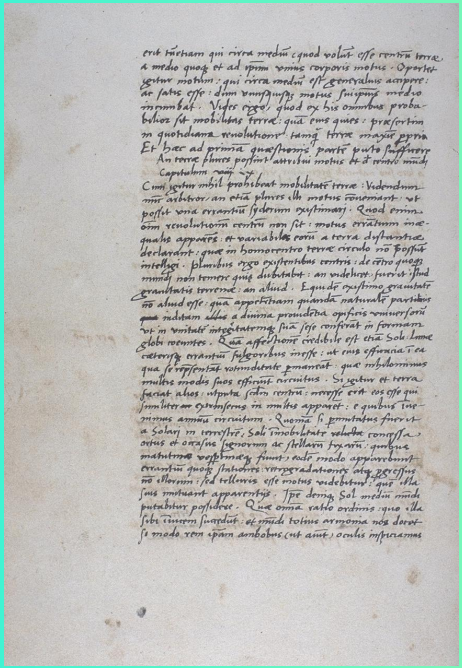
A. Odrzywołek (IFUJ, 2005)
Zagadnienia teorii rotujących gwiazd

Mikołaj Kopernik *„**De Revolutionibus**”, Księga I, Rozdział IX:*



Mikołaj Kopernik *„**De Revolutionibus**”, Księga I, Rozdział IX:*



”Ja w każdym razie mniemam, że ciężkość nie jest niczym innym, jak tylko naturalną dążnością, którą boska opatrzność Stwórcy wszechświata nadała częściom po to, żeby łączyły się w jedność i całość, skupiając razem w kształt kuli. A jest rzeczą godną wiary, że taka dążność istnieje również w Słońcu, Księżycu i innych świecących planetach, po to, by na skutek jej działania trwały w tej krągłości...”

Sferoid Maclaurin'a

- C. Maclaurin, *Treatise on fluxions*, 1742
- Jedno z pierwszych zastosowań metod Newtona: rachunku nieskończenie małych
- Obrona przed atakami biskupa G. Berkely'a

$$\Phi_g(x,y,z) = \pi\, G\, \rho \left[(a_x^2 - x^2)\, A_x + (a_y^2 - y^2)\, A_y + (a_z^2 - z^2)\, A_z \right]$$

$$A_i = a_x a_y a_z \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2+u)(a_x^2+u)(a_y^2+u)(a_z^2+u)}$$

$$\Phi_c(x,y,z) = \frac{1}{2}\Omega^2 \left(x^2 + y^2\right)$$

$\Phi_g + \Phi_c = C = const \longrightarrow$ równanie pewnej elipsoidy.

- Żądając aby osie tej elipsoidy były a_x, a_y, a_z otrzymujemy układ 3 równań
- Rozwiązanie układu daje kształt elipsoidy w funkcji parametrów ρ, Ω, V

Układ równań

(1) $\frac{\widetilde{C}}{a_x^2} = \pi\, G\, \rho\, A_x - \frac{1}{2}\Omega^2$

(2) $\frac{\widetilde{C}}{a_y^2} = \pi\, G\, \rho\, A_y - \frac{1}{2}\Omega^2$

(3) $\frac{\widetilde{C}}{a_z^2} = \pi\, G\, \rho\, A_z$

(4) $\widetilde{C} = \pi\, G\, \rho \left(a_x^2 A_x + a_y^2 A_y + a_z^2 A_z\right) - C$

(5) $V = \frac{4}{3}\pi\, a_x a_y a_z$

$(V, \rho, \Omega) \longrightarrow (a_x, a_y, a_z, C, \widetilde{C})$

Rozwiązanie układu równań

$$\chi = \frac{\varepsilon(1+2\,\varepsilon^2)\arccos\varepsilon - 3\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

- Dla $\frac{E_k}{E_g} = 0 \longrightarrow$ nieruchoma kula
- Dla $0 < \frac{E_k}{E_g} < 0.5 \longrightarrow$ sferoid Maclaurina
- Dla $\frac{E_k}{E_g} = 0.5 \longrightarrow$ nieskończony „placek” w spoczynku

Tw. wirialne:

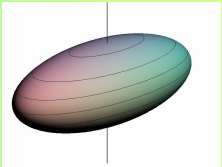
$$\frac{E_k}{E_g} = \frac{1}{2} - \int p\, d^3\mathbf{r}/E_g \longrightarrow 0 < \frac{E_k}{E_g} < \frac{1}{2}$$

Parametry opisujące rotację

- Prędkość kątowa Ω
- Moment pędu J
- $\chi \equiv \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$
- Stosunek $E_k/|E_g|$
- Bezwymiarowy moment pędu $j^2 = \frac{1}{4\pi G}\frac{J^2}{M^{10/3}}\rho_{max}^{1/3}$
- Mimośród przekroju e
- Spłaszczenie $\varepsilon = R_p/R_{eq}$

Elipsoida Jacobiego

Dla $E_k/E_g > 0.1375$ (czyli $\chi > 0.187$)
pojawiają sie dodatkowe rozwiązania!
(C. Jacobi, 1834)

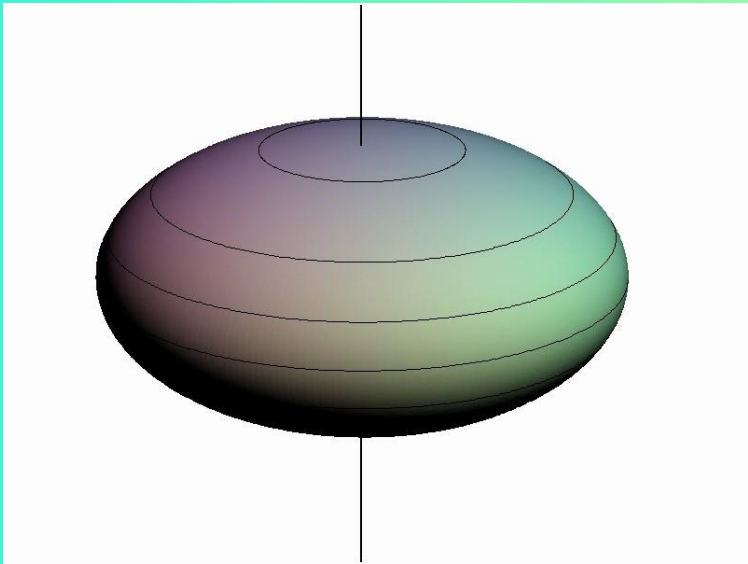


- Dla $\frac{E_k}{E_g} \geqslant 0.1375 \longrightarrow$ sferoid Maclaurina
- Dla $0.1375 < \frac{E_k}{E_g} < 0.5 \longrightarrow$ elipsoida (trójosiowa) Jacobiego
- Dla $\frac{E_k}{E_g} = 0.5 \longrightarrow$ nieskończony „pręt” w spoczynku

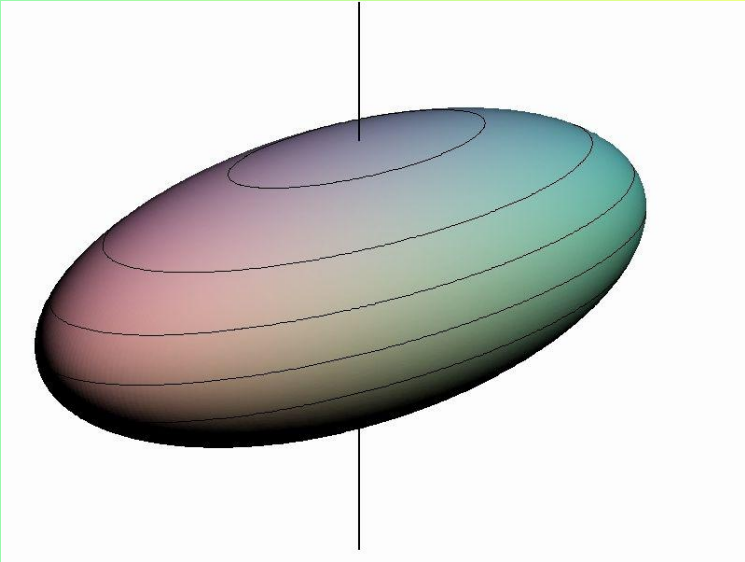
Dla zadanej masy M i krętu J elipsoida Jacobiego jest *„stanem podstawowym”* - minimum energii mechanicznej $E_k + E_g$.

Sferoid Maclaurina jest więc *,,stanem metastabilnym’’*.

Sferoid Maclaurina



Elipsoida Jacobiego



$$\frac{E_k}{E_g} = 0.16$$

Stabilność sferoidu Maclaurina i elipsoidy Jacobiego

- $E_k/E_g < 0.1375 \longrightarrow$ sferoid Maclaurina jest stabilny
- $E_k/E_g = 0.1375 \longrightarrow$ sferoid Maclaurina jest identyczny z elipsoidą Jacobiego
- $0.1375 < E_k/E_g < 0.27 \longrightarrow$ s. Maclaurina jest wiekowo niestabilny
- $E_k/E_g > 0.27 \longrightarrow$ s. Maclaurina jest dynamicznie niestabilny
- $0.1375 < E_k/E_g < 0.1628 \longrightarrow$ e. Jacobiego jest stabilna
- $E_k/E_g > 0.1628 \longrightarrow$ elipsoida Jacobiego jest dynamicznie niestabilna

„Kolaps” kwazistatyczny I

Oznaczmy: T_d – typowy czas dla procesów dyssypatywnych
T_e – typowy czas ewolucji układu

$T_e >> T_p$

- Układ osiąga $E_k/E_g = 0.27$
- Dochodzi do niestabilności dynamicznej
- Gwałtowna utrata nadmiaru momentu pędu
- Zniszczenie układu

$T_e << T_p$

- Układ osiąga $E_k/E_g = 0.1375$
- Tworzy się e. Jacobiego
- Układ osiąga $E_k/E_g \simeq 0.16$
- Tworzy się gruszka Poincarego
- Dwa okrążające sie ciała

Model Roche'a

Masa M skupiona w centrum *plus* otoczka o gęstośći $\rho \to 0$.

`Powierzchnie ekwipotencjalne:`

$$\frac{GM}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = const$$

`Powierzchnia krytyczna:`

siła odśrodkowa i grawitacyjna równoważą się:

$$\frac{GM}{R_e^2} = \Omega^2 R_e, \qquad R_e = \left(\frac{GM}{\Omega^2}\right)^{1/3}$$

„Kolaps” kwazistatyczny II

Przy zachowanym kręcie J, $\Omega \sim R^{-2}$.
Wniosek: powierzchnia krytyczna kurczy się szybciej niż samo ciało:

$$R_e \sim R^{4/3}$$

- Ciało znajduje się wewnątrz powierzchnie krytycznej
- Ciało się kurczy: Ω rośnie
- Powierzchnia krytyczna zbliża się do pow. ciała

  -Samo ciało się rozszerza
- Powierzchnia Roche'a zostaje wypełniona
- Następuje *„niestabilność równikowa”* - utrata masy

Dwie drogi rotujących ciał

Ścieżka Maclaurina

- ciało o stałej gęstości
- kurczenie się
- rozpad
- fragmenty wchodzą na:
  - ścieżkę Roche'a
  - ścieżkę Maclaurina

Ścieżka Roche'a

- ciało o prawie punktowym jądrze
- kurczenie się
- wypływ materii z równika
- powstanie dysku
- jądro (dysk) wchodzi na:
  - ścieżkę Roche'a
  - ścieżkę Maclaurina

Uogólniony model Jeansa

Sferoid Maclaurina o masie M i objętości V_1 *plus* otoczka o gęstości $\rho \to 0$ i objętości V_2.

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V_1 + V_2}, \qquad \rho_M = \frac{M}{V_1}$$

$$\chi_R = \frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}}, \qquad \chi_M = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_M}$$

$$\chi_R = 0.36, \qquad \chi_M = 0.187$$

$\rho_M/\bar{\rho} = \chi_R/\chi_M \simeq 2$ co daje $n \simeq 0.6 \quad [0.83, 0.808]$

„Trzecia idea Shapiro”

Shapiro, *The secular bar-mode instability in rapidly rotating stars revisited*, ApJ **613** 1213-1220 (2004).

- Przejście s. Maclaurina → e. Jacobiego wymaga utraty energii
- Podstawowy proces: lepkość
- Ale: lepkość produkuje ciepło
- Ciepło zmienia równanie stanu materii
- Prowadzi to do rozszerzania się ciała
- W efekcie rotacja może spaść poniżej progu niestabilności

Elipsoidy Dedekinda i Riemanna

- L. Dirichlet, 1860, J. Reine Angew. Math. **58**, 181
- R. Dedekind, 1860, J. Reine Angew. Math. **58**, 217
- B. Riemann, 1860, Abhandl. Konigl. Ges. Wis. Gottingen, **9**, 3

Pole prędkości $\mathbf{v}$ (v_x, v_y, v_z): $v_x = -q\,\zeta\,y$, $v_y = (1-q)\,\zeta\,x$, $v_z = 0$,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{v} = \zeta\,\mathbf{e}_z}$$

Równanie elipsoidy:

$$\boxed{G(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0}$$

Wektor normalny: $\boxed{\mathbf{n} = \nabla G = (2\,x/a^2, 2\,y/b^2, 2\,z/c^2)}$

Warunek, że ciecz „nie wypływa” z elipsoidy, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, daje:

$$q = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \qquad 1 - q = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczy”– linii prądu:

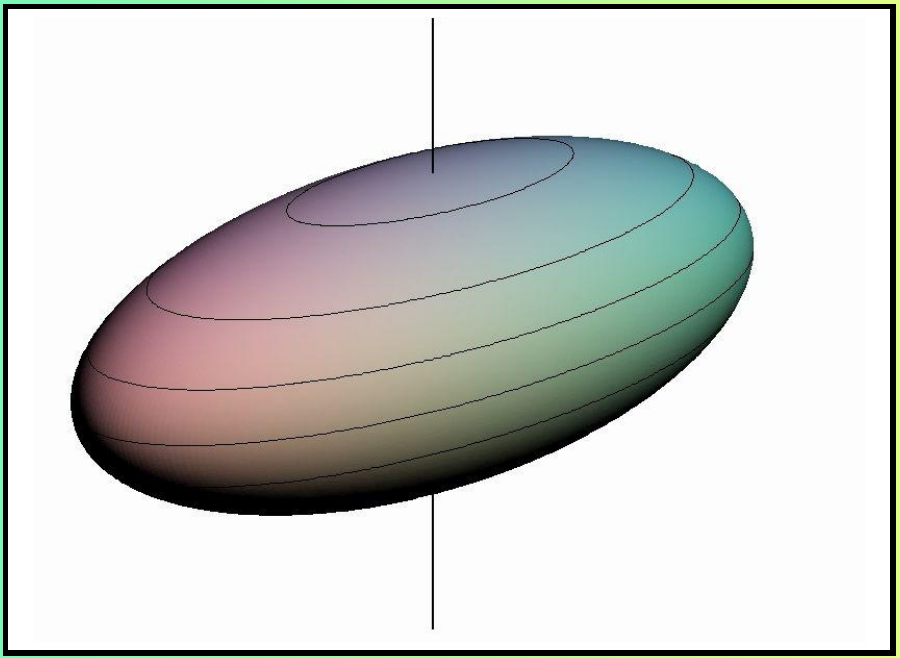
$$\begin{aligned} v_x &= \tfrac{dx}{dt} = -q\,\zeta\,y \\ v_y &= \tfrac{dy}{dt} = (1-q)\,\zeta\,x \end{aligned}$$

Podstawiamy: $x = A\,e^{i\Omega t}, \qquad y = B\,e^{i\Omega t}$:

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q\,\zeta \\ (1-q)\,\zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

Otrzymujemy związek pomiędzy wirowością ζ `elipsoidy Dedekinda` a prędkością kątową $\boldsymbol{\Omega}$ ***elipsoidy Jacobiego:***

$$\zeta = \frac{a^2 + b^2}{a\,b}\,\Omega$$



Definicja rotującej barotropy

przybliżenie elipsoidalne wg. Shapiro

1. Elipsoidalny rozkład gęstości

   $\rho(m)$ identyczne ze sferyczną politropą

2. „Elipsoidalne" ruchy:

   Sztywna rotacja $\Omega = const$

   Jednorodna wirowość $\zeta = const$

   Elipsoidalna ekspansja (kontrakcja)

3. Grawitacja Newtonowska

4. Barotropowe równanie stanu: $P = K\ \rho^{\Gamma}$

   $K = K(s)$ nie jest stałą!

Kształt Ziemi

`Zdefiniujmy:`

$m = F_c/\widehat{F}_g$ - stosunek siły odśrodkowej na równiku do średniej siły przyciągania grawitacyjnego,

e - mimośród przekroju południkowego.

I. Newton (1687): $\frac{e}{m} = \frac{5}{4}$ Ch. Huygens (1690): $\frac{e}{m} = \frac{1}{2}$

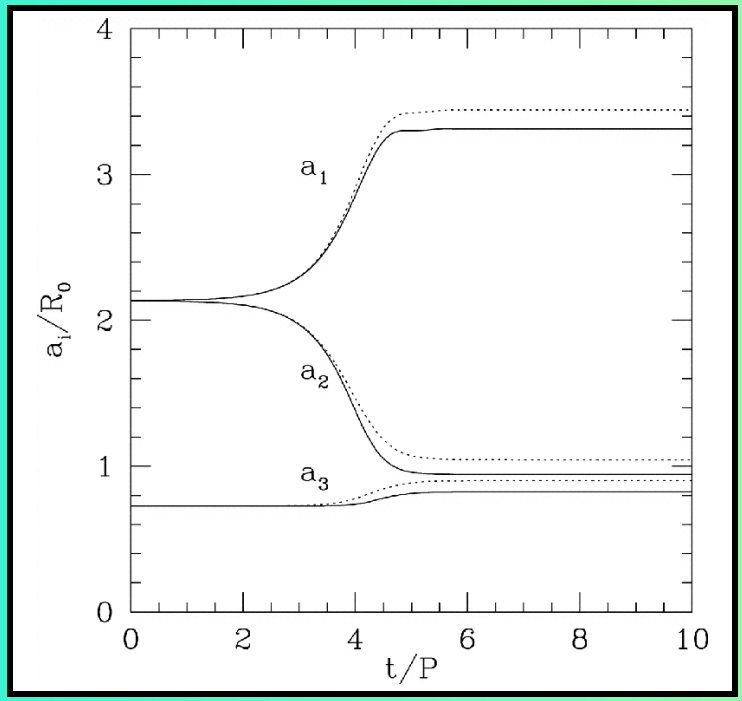
A.-C. Clairaut (*Theorie de la figure de la terre*, 1743)

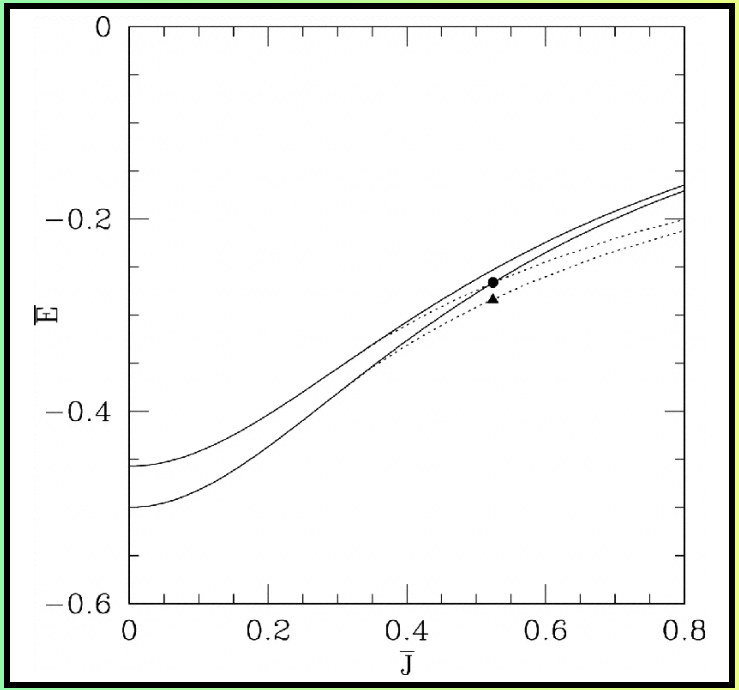
$$\frac{e}{m} = \frac{5}{2\,[2+\eta(a_s)]}$$

Dla $\rho = const$: $\eta(a_s) = 0$.

Dla masy skoncentrowanej w $r = 0$: $\eta(a_s) = 3$.

Wyniki *„elipsoidalnej hydrodynamiki”*





Cel: ewolucja rotującej gwiazdy

Podejście I	Podejście II
Rodzina sferoidalnych powierzchni	**Kontury stałej masy wyliczone**
Opis rotacji poprzez $j(m)$	Opis rotacji poprzez Φ_c
Rotacja podlega ewolucji	Rotacja założona z góry
Pełny opis materii w gwieździe	Barotropowe równanie stanu
Rotacja „powłokowa" (*shellular*)	Rotacja cylindryczna
Brak równowagi hydrostatycznej	**Pełna równowaga hydrostatyczna**

Toroidalny zapłon białego karła

Pierwsza poprawka:

$$h_1 = h_c\, w_{4/3}(\lambda r) - \Phi_c(r) + \Delta C$$

w centrum:

$$w_n(x) \simeq 1 - \frac{1}{6}\, x^2 + \frac{n}{120}\, x^4 + \ldots, \qquad \Phi_c \simeq -\frac{1}{2}\Omega_0^2\, r^2 + \ldots$$

w tym przyliżeniu:

$$h_1(r) = h_c + \left(\Omega_0^2 - \frac{4}{3}\pi G \rho_c\right)\, r^2 + \ldots$$

Jeżeli $\Omega_0^2 > \frac{4}{3}\pi G \rho_c$ to $\rho_c < \rho_{max}$!
Gęstość zapłonu białego karła $\rho_c \simeq 2 \cdot 10^9$ daje $\Omega_0 \sim 25$ rad/s.
Heger & Langer 2000:

$$\Omega_0(\mathrm{Fe}) > 30 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_0(\mathrm{He}) \sim 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Rotujące barotropy w OTW

$$ds^2 = (e^\nu)^2\ dt^2 - (e^\mu)^2 (dr^2 + r^2\ d\theta^2) - (e^\psi)^2 (\omega\ dt - d\phi)^2$$

gdzie ν, μ, ψ, ω to funkcje r i θ.
Czteroprędkość: $u^\alpha = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}} \left[1, 0, 0, \Omega\right] = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}} \left(t^\alpha + \Omega\ \phi^\alpha\right)$,
$v \equiv |\mathbf{v}| = e^{\psi-\nu}\ (\Omega - \omega)$.
Równanie stanu: $p = p(\varepsilon)$; entalpia: $\nabla h = \nabla p/(\varepsilon + p)$

$$\nabla h + \nabla \nu + \nabla \ln \sqrt{1 - v^2} + \frac{v^2}{1 - v^2}\ \nabla \Omega/(\Omega - \omega) = 0$$