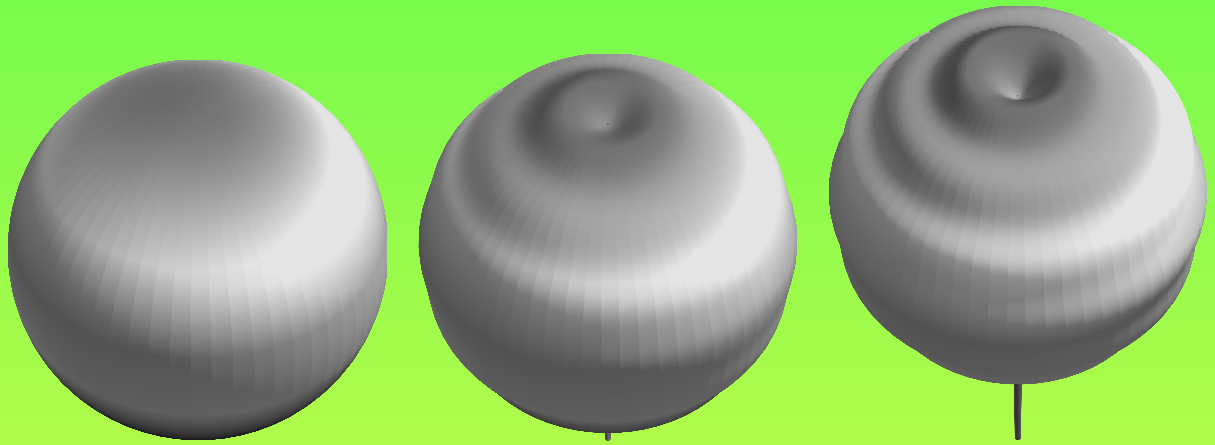
Dziura w Statycznym Wszechświecie Einsteina



Statyczny Wszechświat Einsteina: spojrzenie tradycyjne

3-sfera o promieniu $R(t)$:

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2 \left[d\chi^2 + \sin^2\chi \, d\Omega^2\right]$$

Równania Einsteina:

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{3}{R^2} = 8\pi G\rho + \Lambda$$

$$3\,\frac{\ddot{R}}{R} + 4\pi G\,(\rho + 3p) = \Lambda$$

Zachowanie energii-pędu:

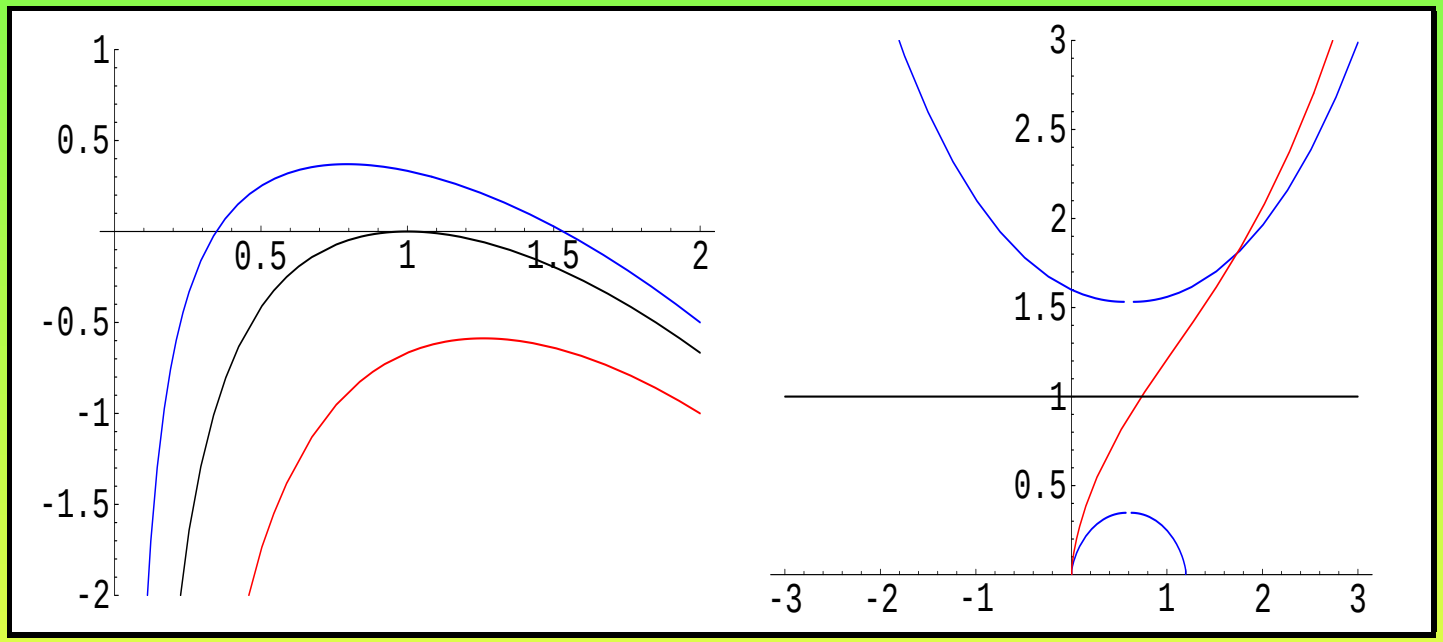
$$\frac{\dot{\rho}}{p+\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R}$$

Równanie stanu materii:

$$p = p(\rho)$$

Dynamika modelu FLRW z $k = +1$

$$V(r) = 1 - \frac{R^2}{3}\left(\Lambda + \frac{4GM}{\pi R^3}\right), \quad E = 0$$



Rozwiązanie Statyczne

Całkowita ilość „źródła pola grawitacyjnego” jest dla wszystkich wszechświatów Einsteina taka sama:

$$8\pi G\,(\rho_E + 3\,p_E) = 2\,\Lambda$$

natomiast podział pomiędzy gęstość i ciśnienie, a także promień 3-sfery zależy od równania stanu:

$$8\pi G\;\rho_E = \frac{3}{{R_E}^2} - \Lambda$$

$$8\pi G\;p_E = -\frac{1}{{R_E}^2} + \Lambda$$

Parametry wszechświata statycznego

Limity teoretyczne	Eddindton (1930)	Λ-CDM (2006)
ρ_E	$10^{-27} g/cm^3$	$3.5 \times 10^{-30} g/cm^3$
$\sqrt{\frac{1}{\Lambda}} < R_E < \sqrt{\frac{3}{2\Lambda}}$	328 Mpc	3000 Mpc
$\Lambda < \frac{8\pi G \rho_E}{c^2} < 2\Lambda$	$\lambda = 10^{-54} cm^{-2}$	$\Lambda = 1.2 \times 10^{-56} cm^{-2}$
$\sqrt{\frac{27}{128}} \frac{\pi c^2}{\sqrt{\Lambda} G} \leqslant M_E << \frac{\pi c^2}{2\sqrt{\Lambda} G}$	$10^{22} M_\odot$	$10^{23} M_\odot$
Stała Hubble'a	528^{+500}_{-0} km/s/Mpc	$70^{+2.4}_{-3.2}$ km/s/Mpc

Niestabilność wszechswiata statycznego

$$R(t) = R_E + \delta R(t), \quad \rho(t) = \rho_E + \delta\rho(t), \quad p(t) = p_E + \delta p(t)$$

$$\frac{\delta\rho}{p_E + \rho_E} = -3\,\frac{\delta R}{R_E}$$

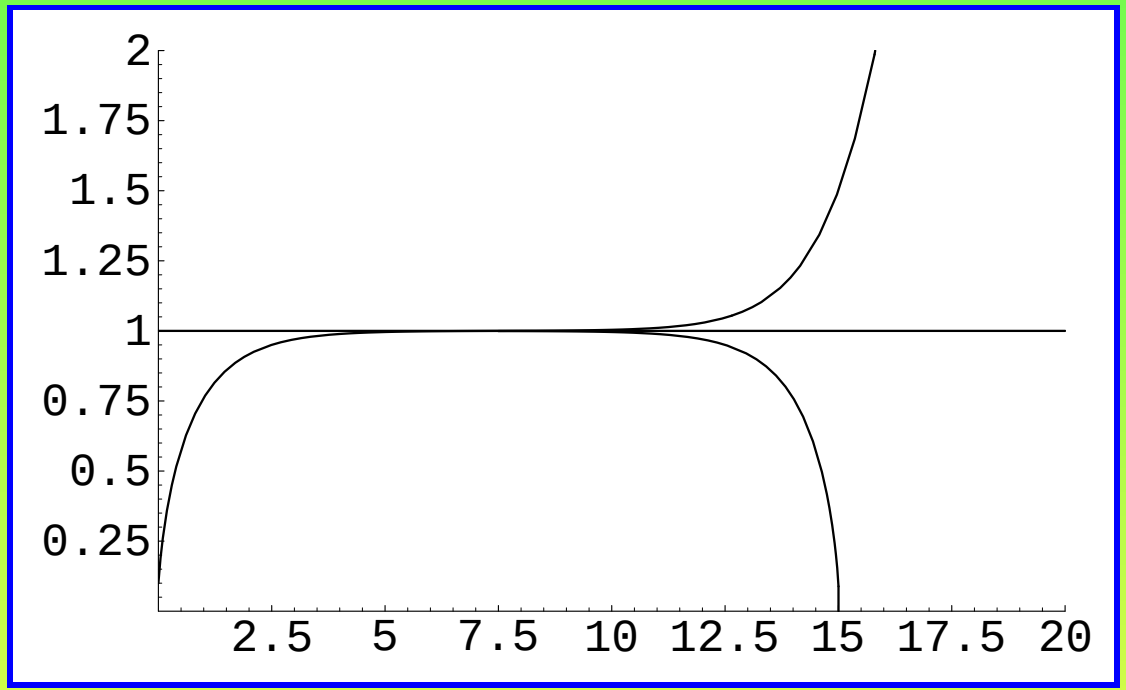
$$\delta\ddot{R} - \frac{\bar{c}^2}{{R_E}^2}\,\delta R = 0, \quad \bar{c}^2 = c^2 + {c_s}^2, \qquad {c_s}^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_E}$$

$$R(t) = R_E + \delta R_0 e^{\,\bar{c}t/R_E}$$

W zależności od znaku początkowej perturbacji δR_0 następuje ekspansja lub kolaps.

Jest to najszybciej rosnący mod!

„Coasting” – „Loitering”



Jest praktycznie niemożliwe odróżnienie modelu statycznego od modeli dynamicznych w fazie plateau.

Równanie dynamiki pyłowego S.W.E.

$$\dot{r}^2 = \frac{\Lambda}{3}(r-1)^2(1+2/r)$$

UWAGA: tylko dla Statycznego Wszechświata Einsteina z $p = 0$!

$$M = 2\pi^2 {R_E}^3 \rho_E = \frac{\pi R_E}{2G}$$

Istnieją 3 rozwiązania równania:

- I. $r > 1$ (A_2)
- II. $r = 1$ (E)
- III. $r < 1$ (A_1)

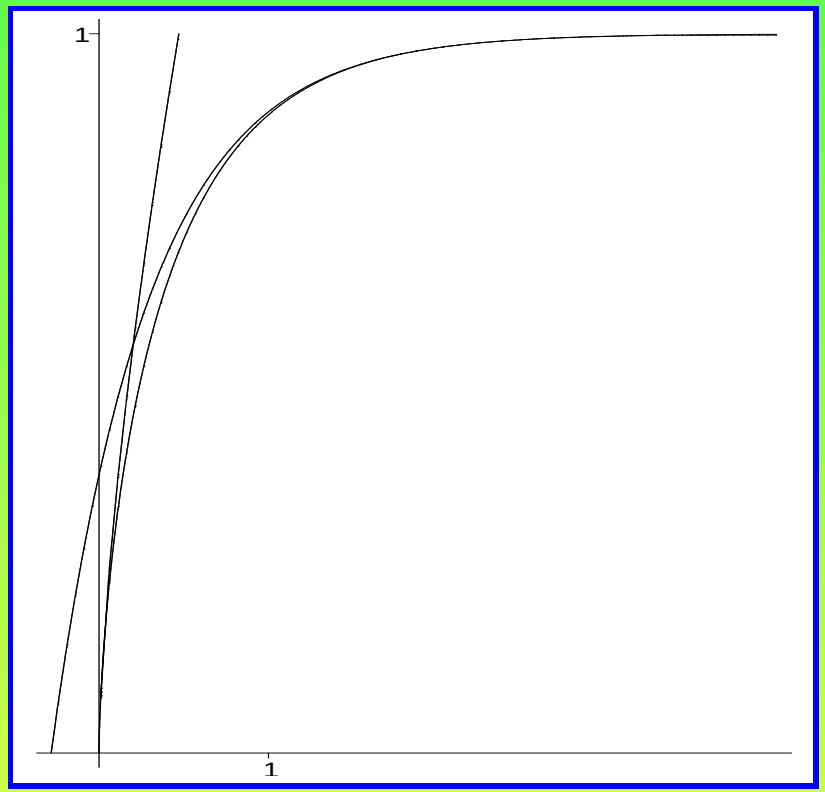
$$t - t_0 = \int \frac{dr}{|r-1|\sqrt{1+2/r}}$$

Modele wg. klasyfikacji Robertsona w nawiasach

Dla przypadku III.

$$t - t_0 = 2\,\mathrm{artanh}\sqrt{\frac{3r}{2+r}}$$

$$-2\sqrt{3}\,\mathrm{arsinh}\sqrt{r/2}$$



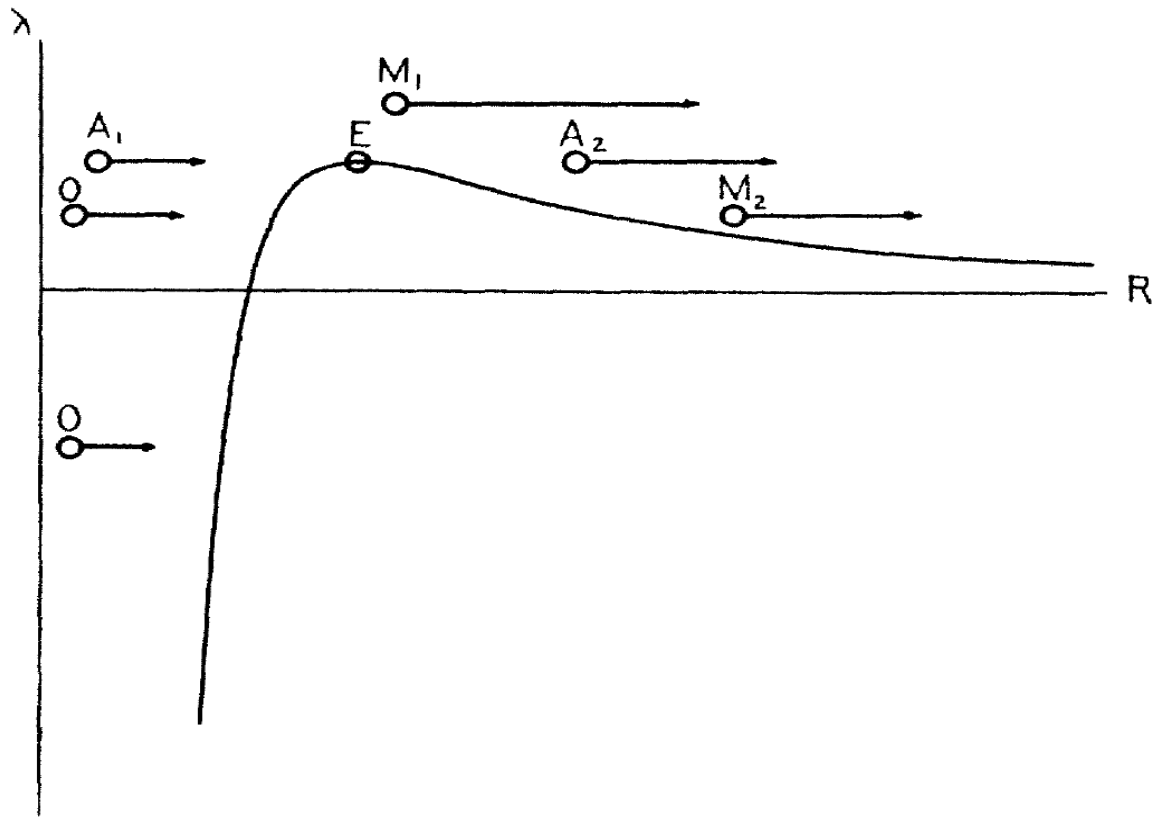


FIG. 4. Types of universes for $k=1$ in which $dp/dR \leqq 0$.

Rozwiązania sferycznie symetryczne

Statyczna czasoprzestrzeń sferycznie symetryczna:

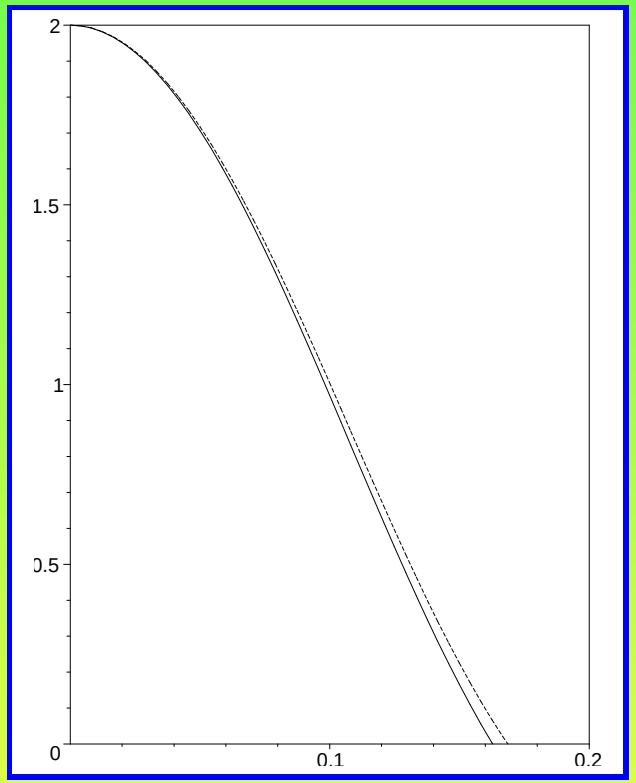
$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}\, dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

Równanie TOV-Λ:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3\, p - 1/3\; r^3 \Lambda)}{r^2\; (1 - 2\; m/r - 1/3\; r^2 \Lambda)}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Typowe rozwiązania r. TOV-Λ



Zwykle traktuje się wpływ Λ jako źródło małej poprawki do struktury relatywistycznych obiektów.

$\leftarrow$ $\rho(r)$ z $\Lambda = 0$ (l. ciągła) i z $\Lambda \neq 0$ (l. przerywana)

Rozwiazanie z $\rho = const$

Wstawiamy $\rho(r) = \rho_E, p(r) = p_E$ do r. TOV-Λ:

$$0 = \ldots r^3 \left(4/3\pi(\rho_E + 3\,p_E) - \Lambda/3\right)$$

$$g_{rr} = e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - r^2/{R_E}^2}, \quad \text{gdzie:} \quad \frac{1}{{R_E}^2} = \Lambda - 8\pi G p_E$$

$$g_{tt} = -\int \frac{dp}{p+\rho} = const$$

$$ds^2 = -const\; dt^2 + \frac{1}{1 - r^2/{R_E}^2} dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

Rozwiązanie dla $r \simeq 0$

$$\rho(r) \simeq \rho_0 + \frac{1}{2}\beta r^2 + \dots \tag{1a}$$

$$p(r) \simeq p_0 + \frac{1}{2} b r^2 + \dots \tag{1b}$$

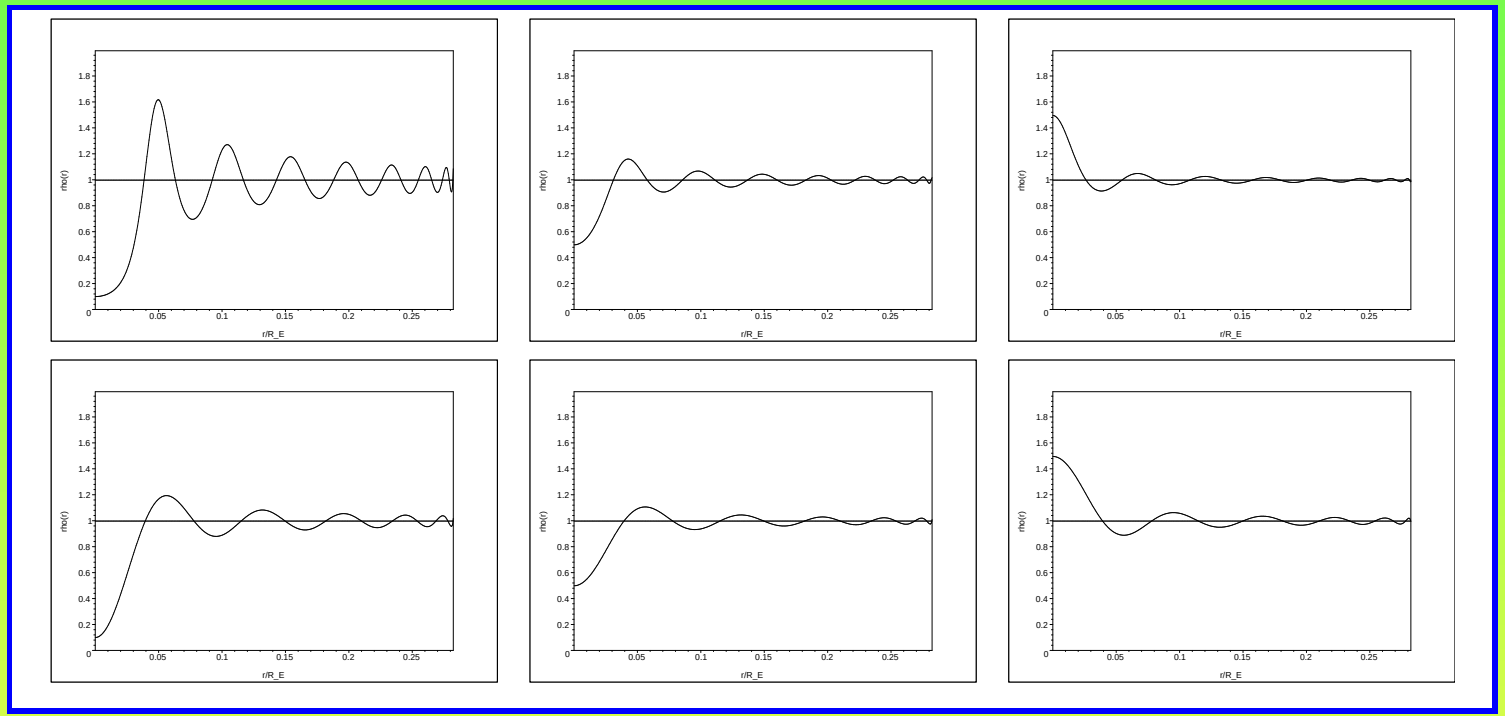
$$m(r) \simeq \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 + \dots . \tag{1c}$$

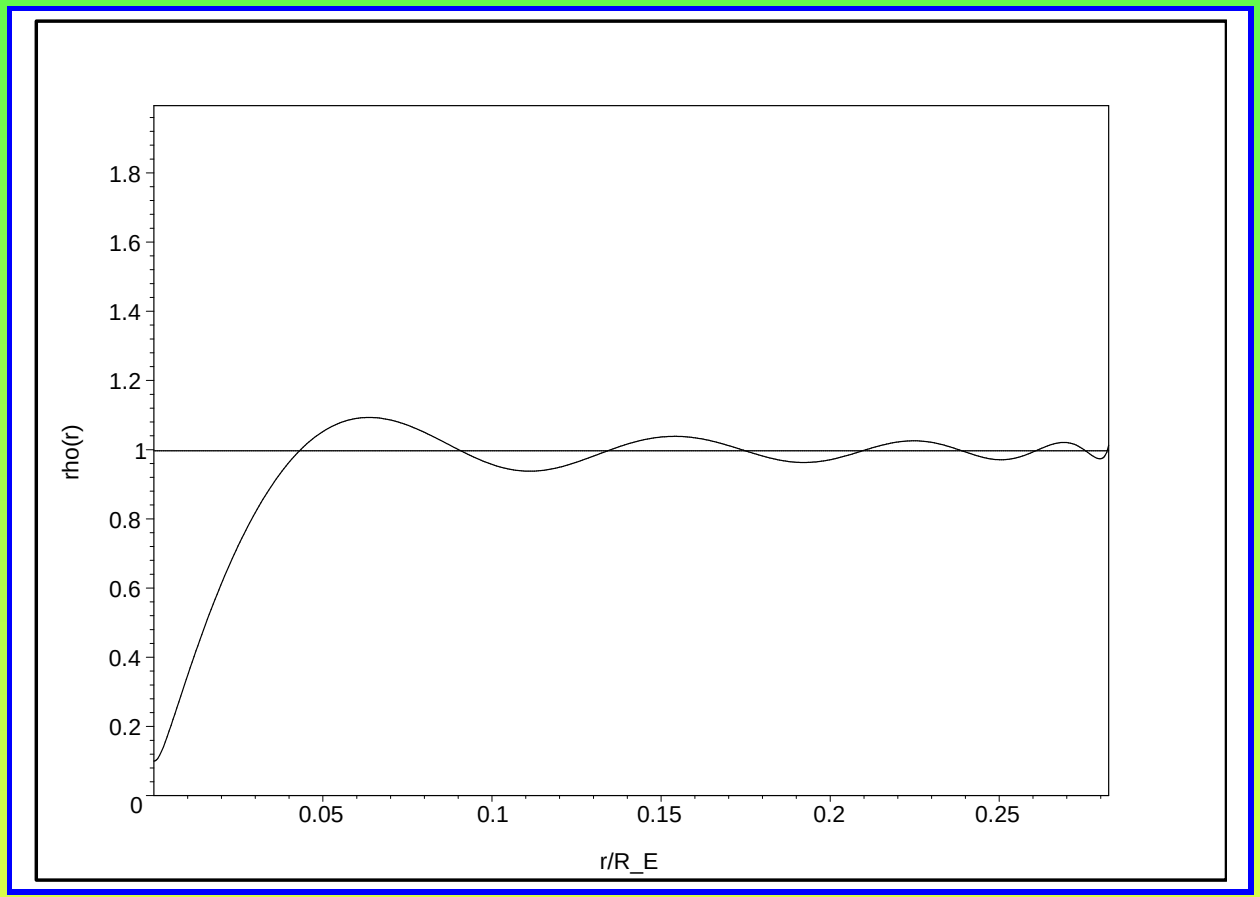
gdzie:

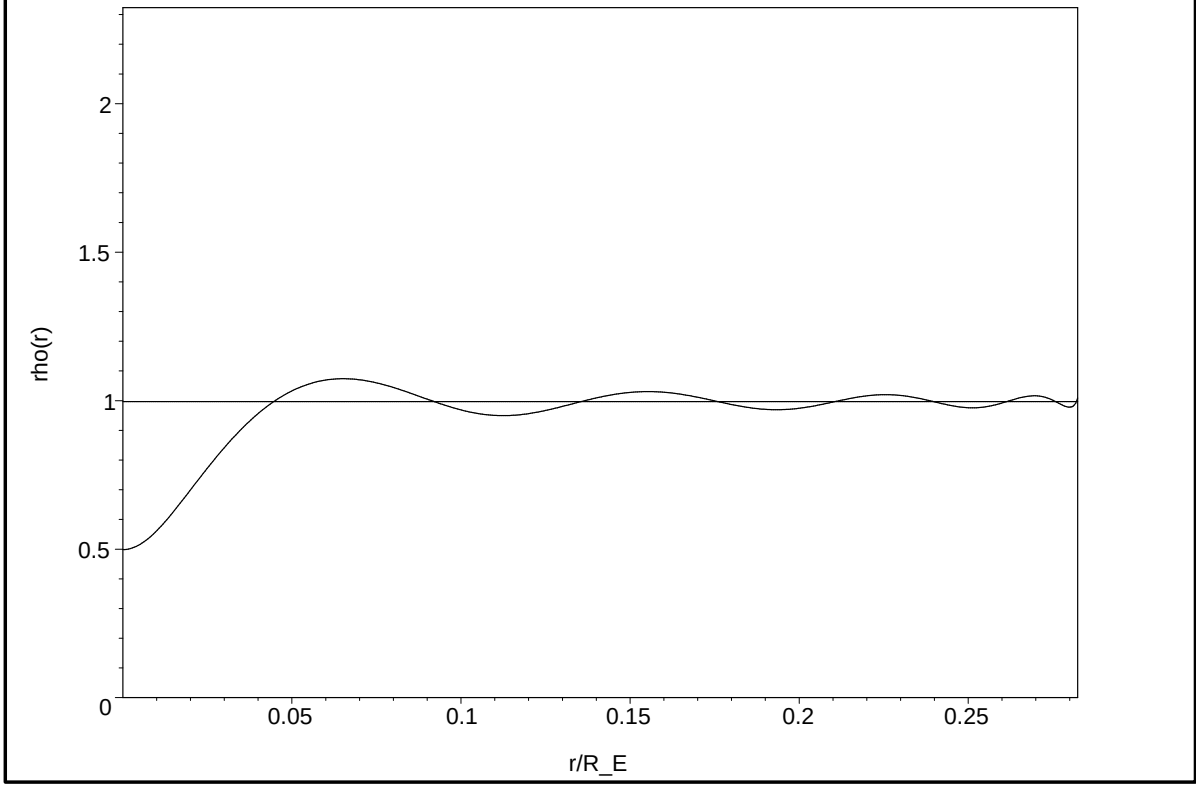
$$b = \frac{4}{3}\pi G(p_0 + \rho_0)(\rho_E + 3p_E - \rho_0 - 3p_0) \tag{2a}$$

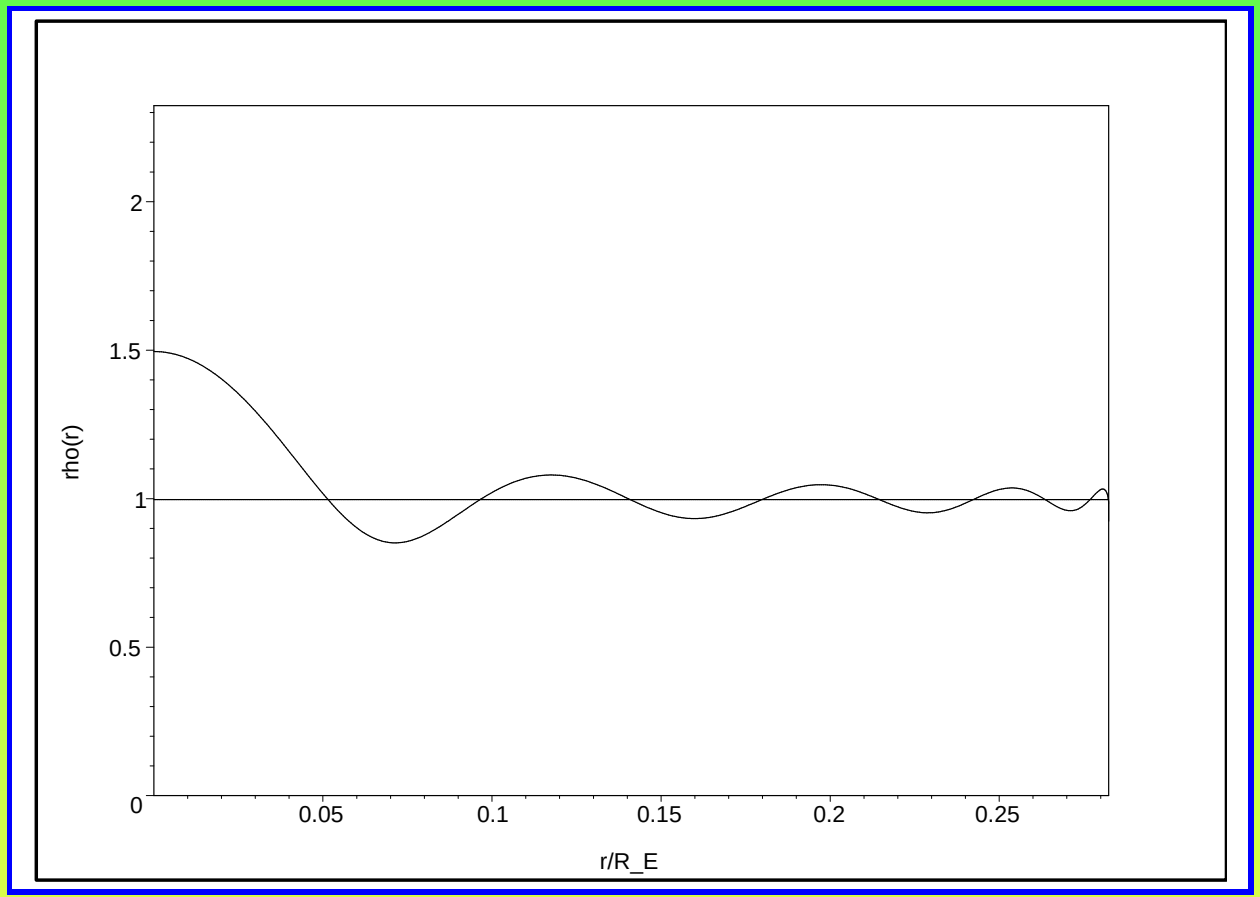
$$\beta = b/{c_s}^2 \tag{2b}$$

Rozwiązania numeryczne




1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
rho(r)
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
r/R_E


rho(r)
2
1.5
1
0.5
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
r/R_E


rho(r)
2
1.5
1
0.5
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
r/R_E

Odpychanie grawitacyjne dziury

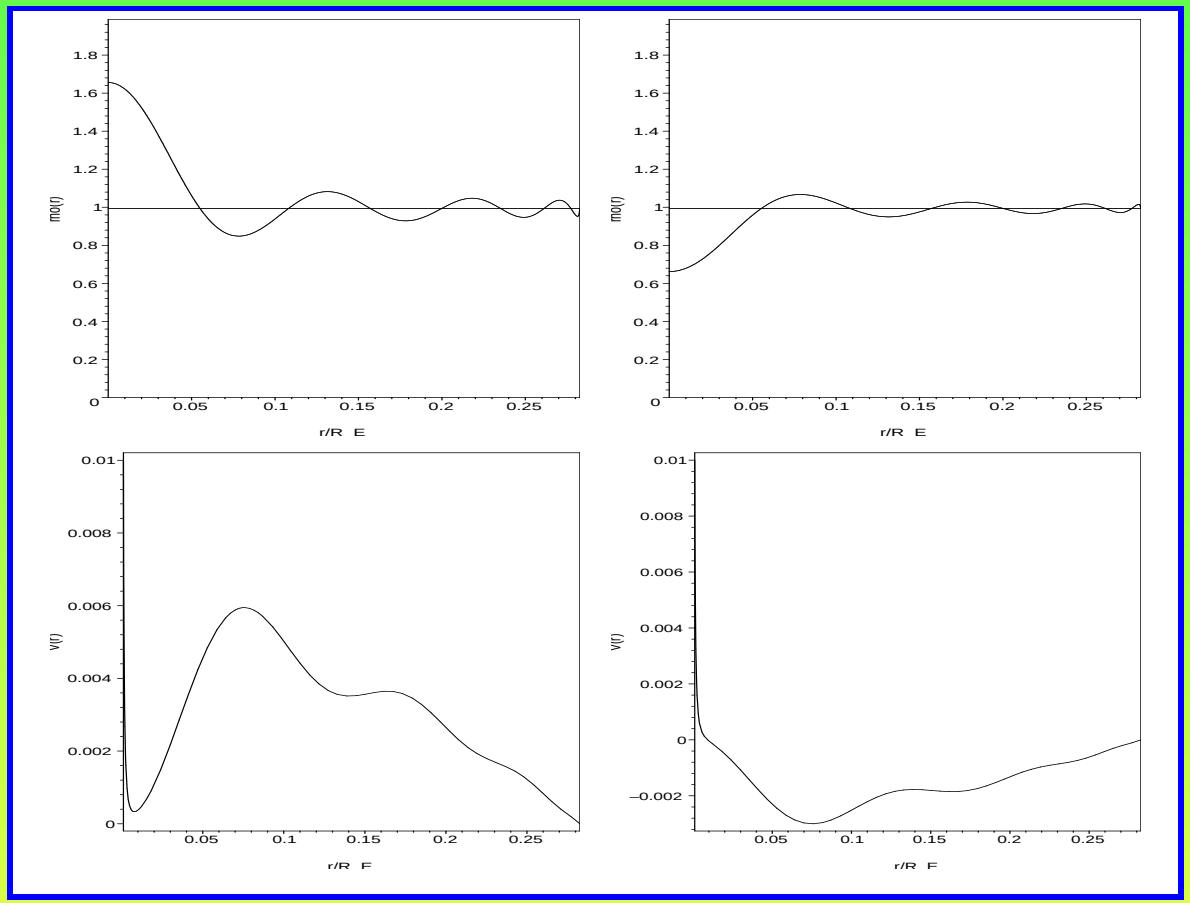
Dla orbity kołowej:

$$g_{rr}\dot{r}^2 = \frac{E^2}{g_{tt}} - 1 - \frac{L^2}{r^2}$$

Dla „dziury”:

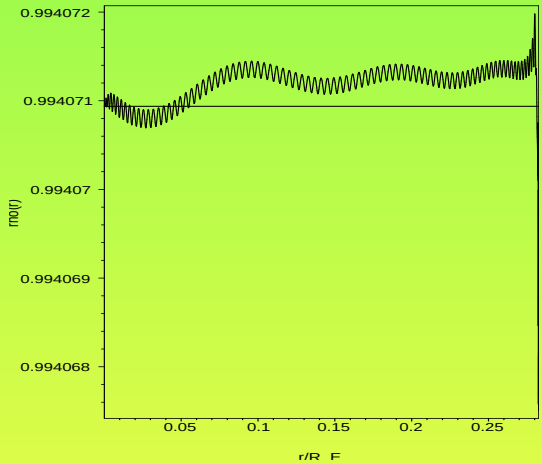
$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{e^{2\nu}}\right)$$

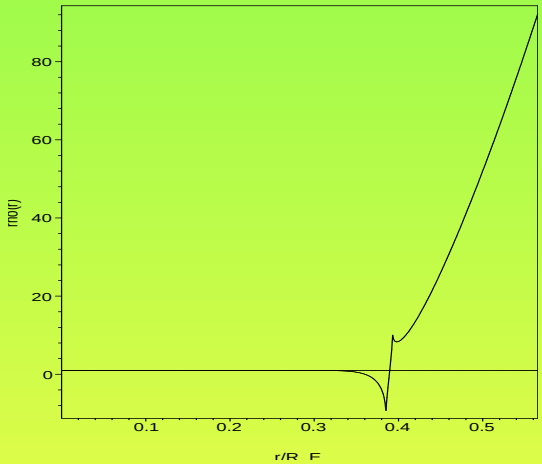
Jeżeli dla żadnej wartości L, E potencjał nie ma ekstremum nie istnieją orbity kołowe i występuje odpychanie.


m0(r)
r/R E
m0(r)
r/R E
v(r)
r/R F
v(r)
r/R F

Rozwiązanie globalne

1. Równanie TOV-Λ pozwala na łatwe rozwiązanie zagadnienia początkowego dla „$r < R_E$”.
2. Występuje osobliwość układu współrzędnych dla $r = R_E$.
3. Nie wiadomo co się dzieje dla $r > R_E$ *za wyjątkiem statycznego wszechświata Einsteina*





Zdeformowana 3-sfera

Część przestrzenna opisana jako powierzchnia o równaniu we współrzędnych sferycznych r, χ, θ, ϕ:

$$r = R(\chi)$$

w 4-wymiarowej przestrzeni Euklidesa.

Dla $r = R_E$ otrzymujemy wszechświat Einsteina.

Metryka ma postać:

$$ds^2 = -e^{2\nu(\chi)}\, dt^2 + \left[\left(\frac{dR}{d\chi}\right)^2 + R^2\right] d\chi^2 + R^2 \sin^2\chi\, d\Omega^2$$

Równania Einsteina

Składowa tt:

$$(R\cos\chi)'\left\{2R\sin\chi\Big(RR''+R^2\Big)-\Big(R'^2+R^2\Big)\Big[4R\sin\chi-(R\cos\chi)'\Big]\right\}=$$

$$(\Lambda+8\pi G\rho)(R\sin\chi)^2\left(R'^2+R^2\right)^2$$

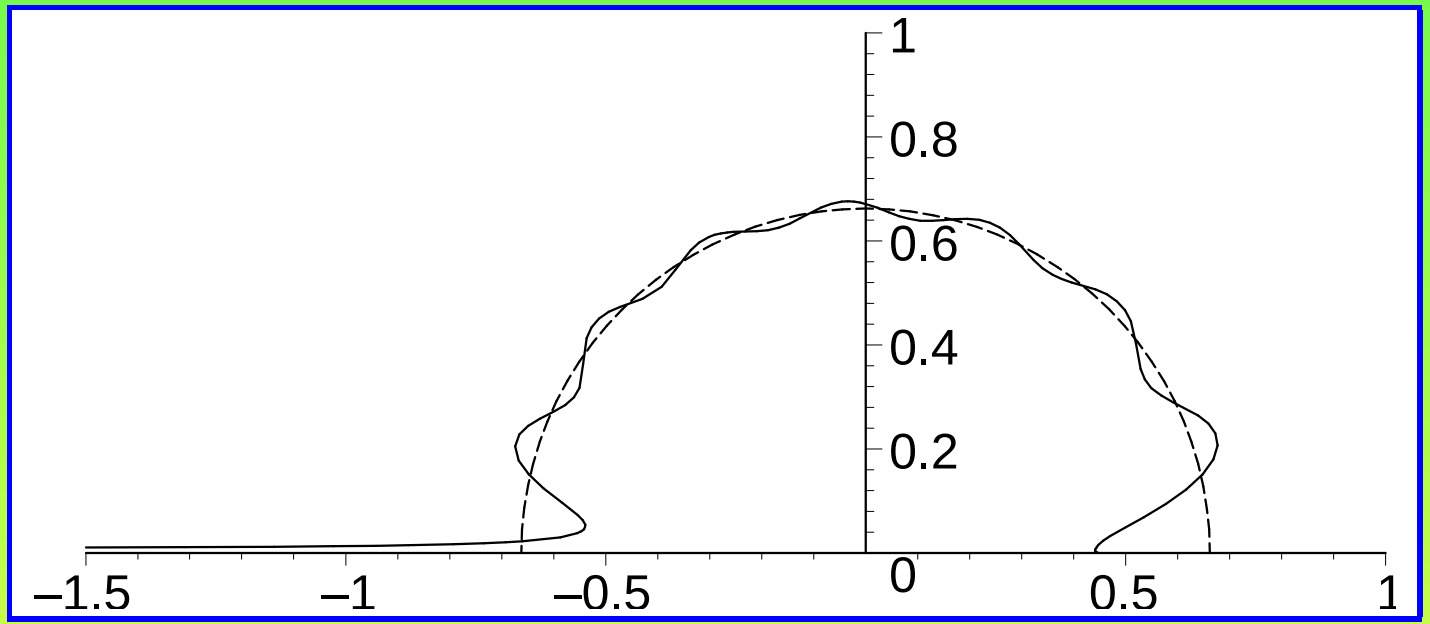
Składowa $\chi\chi$:

$$(R\cos\chi)'^2-\Big[(R\sin\chi)^2\Big]'\,\nu'=(\Lambda-8\pi Gp)\,(R\sin\chi)^2\left(R'^2+R^2\right)$$

$$\nu'=-\frac{p'}{p+\rho}.$$

Warunki brzegowe: $R'(0)=R'(\pi)=0,\quad \rho(\chi_0)=\rho_0.$

Problemy z rozwiązaniem globalnym



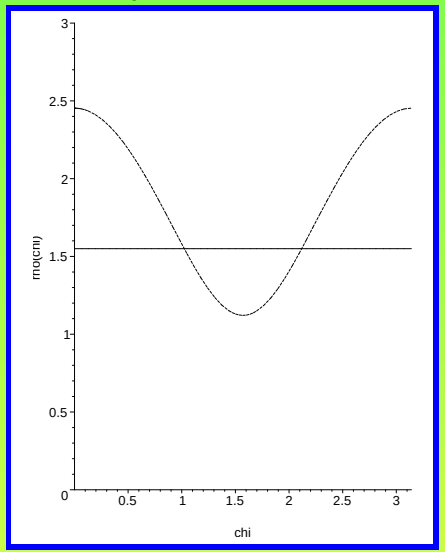
Metoda strzałów: zadajemy $\rho(\chi = 0) = \rho_0$ *i próbujemy róznych wartości* $R_0 = R(0)$.

Problemy z „osobliwością”

- Błędy numeryczne
- Rozwiązania globalne istnieją tylko dla niektórych równań stanu
- Założenie że geometria może być opisana jako 3-powierzchnia $R = R(\chi)$ w 4D jest błędne
- Rozwiązania globalne bez osobliwości nie istnieją

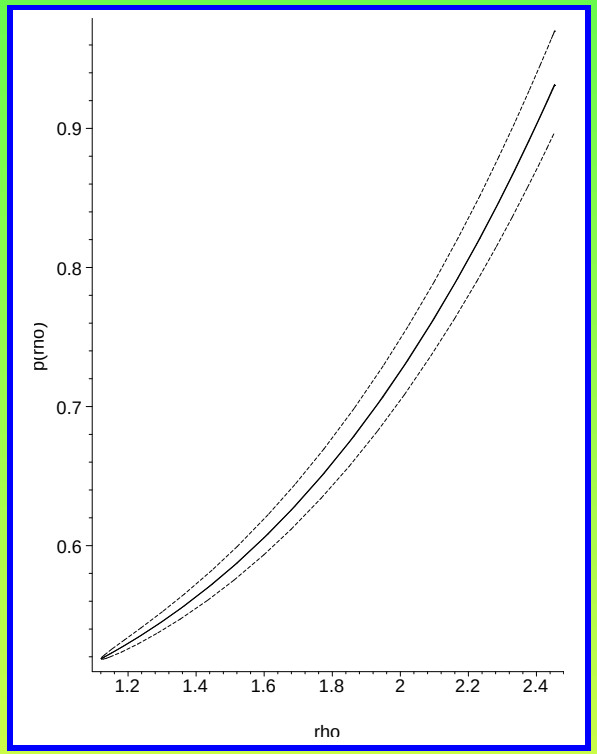
Konstruktywny przykład globalnego rozwiązania

1. Wstawiam do r. Einsteina $R(\chi) = P + Q\cos 2\chi$



2. Obliczam gęstość i cisnienie:

3. Dostają pewną zależność $p(\rho)$ w postaci parametrycznej $p = p(\chi), \rho = \rho(\chi)$.



Linia przerywana pokazuje typowy wynik zastosowania opisanej procedury: niefizyczne równanie stanu:

- wielowartościowość
- p lub ρ ujemne
- $\frac{dp}{d\rho} = {c_s}^2 < 0$

Linia ciagła pokazuje, że można dopasować cisnienie centralnege tak aby obie gałęzie się pokryły i otrzymać fizycznie sensowne równanie stanu.

Rozwiązanie globalne bez osobliwości isnieje!

Co dalej?

- Ustalenie kiedy istnieją rozwiązania globalne
- Opracowanie skutecznej metody znajdywania rozwiązań globalnych
- Ruch w polu grawitacyjnym dziury
- Stabilność i ewolucja dziury
- Dziura w rozszerzającym się Wszechświecie?
- Dziura jako model „pustek”
- Oddziaływania dziura-dziura