

5.1 Prawa Keplera

Wyprowadzić trzy prawa Keplera dla ruchu w potencjale typu $-GM/r$, gdzie G – stała grawitacji, M – masa centralna (w $r = 0$), r – odległość od centrum. Wyznaczyć wielkości zachowane, tor ruchu oraz związek pomiędzy wielkościami zachowanymi (E, J) a parametrami orbity (a, e).

5.2 Średnia odległość od Słońca

Kepler oryginalnie twierdził, że w jego prawie występuje średnia odległość planety od Słońca. Ile naprawdę wynosi taka prawidłowo zdefiniowana średnia na orbicie eliptycznej?

5.3 Redukcja zagadnienia 2 ciał do 1 ciała

Sprowadzić newtonowskie zagadnienie 2 ciał do wyniku Zad. 5.1. Podać przepis na odtworzenie ruchu obu ciał na podstawie rozwiązania równoważnego problemu 1 ciała.

5.4 Orbity eliptyczne

Zawsze zamknięte, powtarzające się orbity eliptyczne istnieją tylko dla ruchu w potencjale centralnym typu r^n dla $n = -1$ i $n = 2$. Porównać ruch w obu potencjałach, jeżeli torem w obu przypadkach jest identyczna elipsa o mimośrodku e i wielkiej półosi a .

5.5 Precesja peryhelium

Jeżeli w miejsce standardowego newtonowskiego potencjału $V = -GM/r$ podstawimy

$$V = -\frac{GM}{r^{1+\delta}}, \quad \text{gdzie} \quad |\delta| \ll 1,$$

to orbita eliptyczna o wielkiej półosi a , mimośrodku e i okresie $T = 2\pi/\Omega_{\text{Kep}}$, która jest ścisłym analitycznym rozwiązaniem dla $\delta = 0$, zacznie się obracać. Obliczyć prędkość kątową Ω jej wielkiej półosi (częstość precesji).

ODP:

$$\frac{\Omega}{\Omega_{\text{Kep}}} \simeq \frac{\delta}{1 + \sqrt{1 + e^2}} \in \{\delta/2, \delta\}.$$

5.6 Ograniczony problem 3 ciał

Wyprowadzić równania ruchu dla płaskiego, ograniczonego, kołowego problemu trzech ciał o masach m , M , $\mu \simeq 0$ w układzie korotującym. Zidentyfikować siły pozorne (Coriolisa, odśrodkową, ...). Czy ktoś odważy się wyprowadzić powyższe równania w 3D?

5.7 Punkty Lagrange'a

W ramach założeń poprzedniego zadania wyznaczyć rozwiązania niezależne od czasu dla stosunku mas $q = m/M = 1$. Spróbować uogólnić wynik na przypadek $m < M$ ($q < 1$).

5.8 Stabilność punktów Lagrange'a

Dla jakiego stosunku mas $q = m/M$ położenie w punktach Lagrange'a jest liniowo niestabilne? W tym celu:

1. zlinearyzować równania wyprowadzone w Zad. 5.6 w otoczeniu jednego z punktów wyznaczonych w Zad. 5.7,

2. wyznaczyć wielomian charakterystyczny,
3. określić, kiedy część rzeczywista wszystkich wartości własnych jest dodatnia.