4.1 Powierzchnia swobodna rotujących ciał

Rozwiązać równanie rotującej gwiazdy $h + \Phi_g + \Phi_c = C$ określając kształt powierzchni $h \equiv 0$ dla:

- wiadra Newtona, gdzie Φ_g - pole jednorodne, Φ_c - rotacja sztywna (ze stałą prędkością kątową),
- modelu Roche'a, Φ_g - masa punktowa, Φ_c - rotacja sztywna,
- dysku Keplerowskiego, Φ_g - masa punktowa, Φ_c - prawo Keplera.

4.2 Ekstremalne spłaszczenie gwiazdy

W modelu Roche'a rotującej gwiazdy obliczyć maksymalne możliwe spłaszczenie R_p/R_e, gdzie R_p jest „promieniem" biegunowym (na osi obrotu $r = 0$), a R_e równikowym (na płaszczyźnie $z = 0$). Jako maksymalną rotację uznajemy sytuację, w której prędkość na równiku staje się równa I prędkości kosmicznej.

Obliczyć objętość ekstremalnej gwiazdy Roche'a.

 andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

ODP: $R_p/R_e = 2/3$, zob. A&A 517, A7 (2010), rozdz. 4; $V = 4/3\pi R_e^3 \kappa$, $\kappa = \log(27) - 4 + 3\sqrt{3} - 6 \coth^{-1}\sqrt{3} \simeq 0.5411156$.

4.3 Elipsoida Maclaurina

Powoli obracająca się ze stałą prędkością kątową Ω nieściśliwa ciecz o stałej gęstości ρ pod wpływem własnej grawitacji przyjmuje w stanie równowagi kształt elipsoidy obrotowej o półosiach $a = b > c$. Wyznaczyć jej prędkość kątową Ω jako funkcję spłaszczenia $\varepsilon = c/a$ i gęstości ρ.

ODP:

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} = \varepsilon \frac{(2\varepsilon^2 + 1) \arccos(\varepsilon) - 3\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

4.4 Twierdzenie Poincare-Wavre

Obliczyć w układzie cylindrycznym r, z, ϕ

$$\mathbf{rot}(\vec{v} \times \mathbf{rot}\vec{v}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})),$$

jeżeli stacjonarne pole prędkości $\vec{v}$ jest zadane cylindryczną rotacją różnicową (różniczkową)

$$\vec{v}(r, z, \phi) = \Omega(r, z) r \ \vec{e}_\phi.$$

ODP: $2r\Omega\partial_z\Omega$.

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl