

3.1 Równanie Saha

Na podstawie wzorów na pot. chemiczny gazu doskonałego, praw zachowania liczby barionowej oraz ładunku elektrycznego wyprowadzić szczegółowo równanie na stopień „jonizacji” materii, np. atomu $H \rightarrow p^+ + e^-$, dysocjacji cząstki α lub innego wybranego przykładu.

3.2 Tempo reakcji termojądrowych: model sztywnych kul

Obliczyć tempo reakcji (zderzeń na sekundę w jednostce objętości) nienaładowanych kul o promieniach r_1, r_2 i masach $m_1 = m_2$, zakładając, że ich gęstości liczbowe wynoszą n_1 i n_2 a rozkład prawdopodobieństwa prędkości zadany jest rozkładem Maxwella-Boltzmannna w temperaturze T .

$$\text{ODP: } \sigma n_1 n_2 \sqrt{8k_B T / \pi / \mu}, \quad \sigma = \pi(r_1 + r_2)^2, \quad \mu = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}.$$

3.3 Tempo reakcji termojądrowych: tunelowanie

Wyznaczyć prawdopodobieństwo tunelowania cząstki o energii E i ładunku $+Z_b q_e$ w polu elektrostatycznym jądra o ładunku $+Z_a q_e$, gdzie q_e to ładunek elementarny, natomiast Z_a, Z_b liczby protonów w jądrze (całkowity ładunek jądra). Wynik wyrazić za pomocą stałej struktury subtelnej α , w układzie SI oraz poprzez energię Gamowa E_g .

$$\text{ODP: } e^{-2\pi\eta}, \eta = \alpha Z_a Z_b / (v/c) \equiv q_e^2 Z_a Z_b / (2\varepsilon_0 h v).$$

3.4 Tempo reakcji termojądrowych: pik Gamowa

Obliczyć tempo reakcji termojądrowych w plazmie o zadanej temperaturze i gęstości jeżeli przekrój czynny $\sigma(E)$ na reakcję jest znany, łącząc wyniki poprzednich zadań. Oszacować wynik korzystając z własności pików Gamowa.

ODP:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{4}{k_B T \sqrt{2\pi\mu k_B T}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{E_g/E} - E/(k_B T)} S(E) dE \simeq \frac{4 \sqrt[6]{2E_g} e^{-3 \sqrt[3]{\frac{E_g}{4k_B T}}}}{\sqrt{3\mu} (k_B T)^{2/3}} S_0.$$

Wskazówka: zob. np: R. Kippenhahn, **Stellar Structure and Evolution** Rozdz. 18.3 Thermonuclear reaction rates lub D. Arnett, **Supernovae and nucleosynthesis**, Rozdz. 3.3 Coulomb barrier

3.5 Wyliczenie S_0 (*)

Obliczyć wielkość S_0 , czyli przekrój czynny na reakcję λ_{pp} w cyklu ppI.

Wskazówka: zob. Bahcall, Neutrino astrophysics, §3.2 Reaction rates, Table 3.2. Gdzie podane jest S_0 . Aby wyliczyć S_0 można zastosować trick polegający na zastąpieniu reakcji pp rozpadem pp , w analogii do rozpadu neutronu, zob. David Griffiths, INTRODUCTION TO ELEMENTARY PARTICLES, 10.3 DECAY OF THE NEUTRON, Weinberg, Teoria pól kwantowych, T.1, Rozdz. 3.4 Szybkości i przekroje czynne, wyprowadzenie wzoru (3.4.31). Element macierzowy można przyjmując $|M|^2 = 2G_F^2 = \text{const}$, gdzie G_F to **stała Fermiego** (sprzę-

zenia oddziaływań słabych).

ODP: Wyliczenie S_0 kalibrowane zmierzonym czasem rozpadu neutronu:

$$S_0 = \frac{f(q_{pp})/f(q_n)}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{\tau} \times \frac{\hbar^3}{m_e^2 c^2},$$

gdzie wsp. przestrzeni fazowej

$$f(q) = \int_0^{q-1} (q-x)x^2 \sqrt{(q-x)^2 - 1} dx,$$

dla rozpadu neutronu $q_n = (m_n - m_p)/m_e$ a dla reakcji pp , $q_{pp} = (2m_p - m_d)/m_e$, natomiast τ jest czasem życia neutronu.

3.6 Równania kinetyki termojądrowej

Wyprowadzić układ równań (różniczkowych, kinetyka reakcji) spalania wodoru w cyklu pep , $ppII$ lub $ppIII$ w analogii do pokazanego na wykładzie cyklu ppI . Sprawdzić, czy wyprowadzony układ zachowuje liczbę barionową.

3.7 Widno energetyczne neutrin słonecznych

Wyznaczyć przebieg widma energetycznego (liczby cząstek emitowanych w przedziale energii neutrina \mathcal{E}_{ν_e}) dla neutrin pp przyjmując warunki w centrum Słońca.

Odp: funkcyjna postać widma energetycznego neutrin pp jest tożsama z f. podcałkową funkcji $f(Q/(m_e c^2))$ z Zad. 3.2, jeżeli utożsamimy $x \equiv \mathcal{E}_{\nu_e}/(m_e c^2)$.

3.8 Oscylacje neutrin słonecznych

W 2-komponentowym modelu mieszania masywnych neutrin (ν_e, ν_μ) z kątem mieszania $\theta_{12} = 33^\circ$ obliczyć długość L oscylacji neutrin *w próżni*. Podać wartość liczbową dla $\mathcal{E}_\nu = 0.1, 1, 10$ MeV.

ODP: $L = 2\mathcal{E}_\nu h/(\Delta m^2 c^3)$. Zob. np. Bahcall, Neutrino astrophysics, Sect. 9.1 B, str. 250.