

# Równowaga hydrostatyczna, f. Lane-Emdena, barotropy i politropy

26 lutego 2024

## 1.1 Równanie samograwitującej barotropy newtonowskiej

Wyprowadzić zaczynając np. od równań mechaniki płynów w polu grawitacyjnym lub praw zachowania **algebraiczny** związek pomiędzy „entalpią właściwą”  $h \equiv (H/V)/\rho$ , gdzie  $H$  - entalpia,  $V$  - obj.,  $\rho$  - gęstość płynu, a potencjałem grawitacyjnym  $\Phi_g$  w równowa-

dze hydrostatycznej. Przedyskutować możliwe formy zależności pomiędzy  $h, \rho$  oraz  $\Phi_g$  (różniczkowe i całkowe). Bez utraty ogólności można założyć, że równanie stanu (EOS), czyli zależność ciśnienia  $P$  od gęstości jest zadana pewną funkcją jednej zmiennej  $P = P(\rho)$ .

$$\text{ODP: } h + \Phi_g = C, \quad h = \int \frac{dp}{\rho}.$$

*Wskazówka:* Rozważyć przypadek sferycznie symetryczny.

## 1.2 Struktura politropowa

Wyznaczyć radialny rozkład gęstości  $\rho(r)$ , ciśnienia  $P(r)$ , masy  $m(r)$  zawartej w kuli o promieniu  $r$  oraz potencjału grawitacyjnego  $\Phi_g(r)$  dla

1. przypadek stałej gęstości  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ,
2. izotermiczne równanie stanu  $P = c_s^2 \rho$ ,
3. kwadratowe równanie stanu  $P = K \rho^2$ ,
4. **sfera Plummera**  $P = K \rho^{6/5}$ ,

5. obiekt idealnie sprężysty o stałym **współczynnikiem sprężystości objętościowej**  $K$  i gęstości początkowej  $\rho_0$ .

### 1.3 Równanie Lane-Emdena

Korzystając z wyniku zadania 1.1 w wersji różniczkowej, rozwiązać równanie struktury sferycznie symetrycznej barotropy z równaniem stanu

$$P = K\rho^\gamma, \quad \gamma = 1 + 1/n,$$

wprowadzając *funkcję Lane-Emdena*. Jest ona zdefiniowana jako rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

$$w_n'' + \frac{2}{z}w_n' + w_n^n = 0, \quad w_n(0) = 1, w_n'(0) = 0.$$

Wyznaczyć radialny *profil gęstości* i  $\rho(r)$  *kontrast gęstości*  $\rho_c/\bar{\rho}$  gdzie  $\rho_c = \rho(0)$  - gęstość centralna (w geometrycznym środku, dla  $r = 0$ ),  $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$  - gęstość średnia. Przedyskutować stosowalność otrzymanych wzorów do opisu Ziemi, Jowisza, Słońca, białych karłów i gromad kulistych gwiazd.

ODP:

$$\rho(r) = \rho_c w_n \left( \frac{r}{R} x_0 \right)^n, \quad \rho_c = \bar{\rho} \left( -\frac{x_0}{3x_1} \right).$$

Wielkości  $x_0, x_1$  stanowią miejsce zerowe (pierwsze!) funkcji  $w_n$  oraz nachylenie (pochodną) w miejscu zerowym  $x_1 = w'_n(x_0)$ .

## 1.4 Moment bezwładności ciał niebieskich

Zadany jest radialny rozkład gęstości samograwitującego ciała o symetrii sferycznej, masie  $M$  i promieniu  $R$ , zbudowanego z materii o politropowym równaniu stanu (wynik poprzedniego zadania).

Obliczyć liczbowy współczynnik  $\kappa$  we wzorze na moment bezwładności  $I = \kappa MR^2$  w zależności od  $n$ . Dla  $n = 0$  oraz  $n = 1$  podać wynik analityczny. Dla pozostałych wartości podać wynik numeryczny.

ODP:

$$\kappa = \frac{2}{3} + \frac{4}{x_0^4 x_1} \mathcal{M}_2,$$

gdzie  $\mathcal{M}_k$  jest  $k$ -tym momentem funkcji Lane-Emdena  $w_n$ :

$$\mathcal{M}_k = \int_0^{x_0} x^k w_n dx.$$

Znane jawnie wartości to  $\kappa = \frac{2}{5}$  dla  $n = 0$  oraz  $\kappa = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}$  dla  $n = 1$ .

## 1.5 Zależność masa-promień

Wyprowadzić zależność promienia  $R$  ciała niebieskiego od jego masy  $M$  w zależności od  $n$ , jeżeli jest ono zbudowane z materii o politropowym równaniu stanu o ustalonym  $K$ . Innymi słowy, zwiększamy masę ciała poprzez akrecję materii o znanym równaniu stanu, i pytamy jak zmieni się jego promień: wzrośnie, zmaleje czy nie zmieni się?