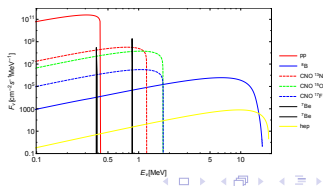
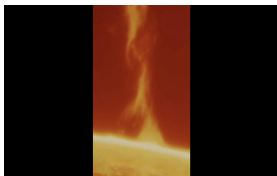


# Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

9 kwietnia 2024



# Reakcje termojądrowe i neutrino słoneczne

# Układ równań różniczkowych: wprowadzenie

Rozważmy reakcję:



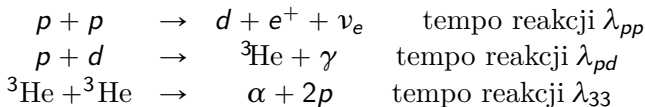
Ilości pozytonów i neutrin nie śledzimy. Zostają ilości protonów  $n_p$  i deuteronów  $n_d$ . Ich zmiana w czasie wynosi:

$$\begin{aligned}\dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 + \dots \\ \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 + \dots\end{aligned}$$

gdzie  $\lambda_{pp}(T, \rho)$  to tempo zachodzenia reakcji  $pp$ , a kropkami zaznaczono inne reakcje

- tempo ubywania protonów musi być równe podwojonemu tempu produkcji deuteronów
- liczba barionowa jest zachowana, czyli  $n_p + 2n_d = \text{const}$ : odpowiednie wyrazy po prawej stronie kasują się
- podobne wyrazy musimy napisać dla każdej z reakcji tworzącej lub niszczącej  $p$ ,  $d$  itd.
- układ jest nieliniowy nawet dla  $T, \rho = \text{const}$
- układ jest sztywny (stiff), co wymusza rozwiązywanie numeryczne metodami uwikłanymi (implicit)
- da się to robić np: w Mathematice: `Method`→"BDF", `MaxDifferenceOrder`→2

# Układ równań różniczkowych cyklu *ppI*



Obliczamy tempo zmian ilości protonów  $n_p$ , deutronów  $n_d$ , jąder helu-3  $n_3$  oraz cząstek alfa  $n_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_pn_d + 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_pn_d \\ \dot{n}_3 &= +\lambda_{pd}n_pn_d - 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_\alpha &= \lambda_{33}n_3^2 \end{aligned}$$

Sensowność wypisanego układu równań można sprawdzić np: za pomocą zasady zachowania liczby barionowej:

$$\sum_{i=1}^4 A_i n_i = n_p + 2n_d + 3n_3 + 4n_\alpha = \text{const},$$

lub równoważnie:

$$\dot{n}_p + 2\dot{n}_d + 3\dot{n}_3 + 4\dot{n}_\alpha = 0.$$

Wyznaczenie współczynników  $\lambda_{pp}$ ,  $\lambda_{pd}$ ,  $\lambda_{33}$ , określających szybkość reakcji wymaga wykonania kilku kroków:

- 1 obliczenie lub zmierzenie przekroju czynnego na reakcję, np:  $\sigma_{pp}$
- 2 uwzględnienie poprawek „kulombowskich”
- 3 uśrednienie w warunkach równowagi termicznej: gazu doskonałego

W obliczeniach tempa reakcji często decydujące są dwa przeciwstawnie działające wyrazy, zależne od energii  $E = Mv^2/2$  zderzających się jąder w układzie środka masy:

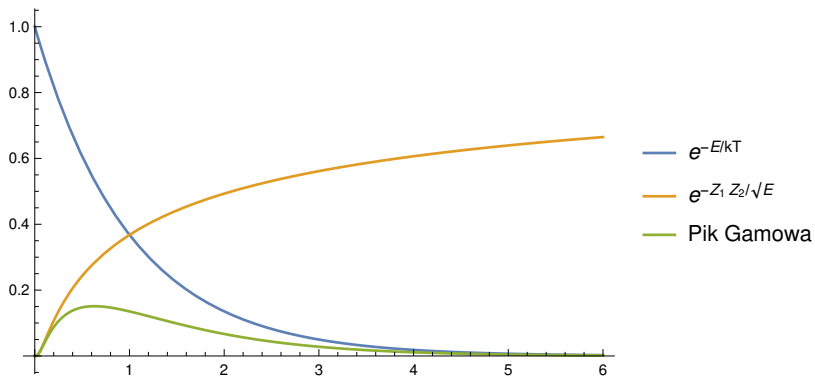
$$\lambda \propto \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} \sigma(E) E dE = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta} E dE$$

- rozkład Boltzmanna  $e^{-\frac{E}{kT}}$ : ilość cząstek o dużych energiach maleje wykładniczo (tzw: ogon termiczny)
- parametr  $\eta$  Sommerfelda ( $v = \sqrt{2E/m}$  - prędkość):

$$\eta = \alpha \frac{Z_1 Z_2}{v/c} = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{2h\epsilon_0 v} \quad (\text{bezwymiarowy wsp. tunelowania})$$

- odpychanie elektrostatyczne – im większa energia, tym większe prawdopodobieństwo tunelowania i zajścia reakcji

# Pik Gamowa

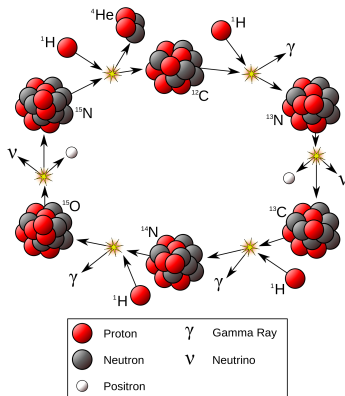
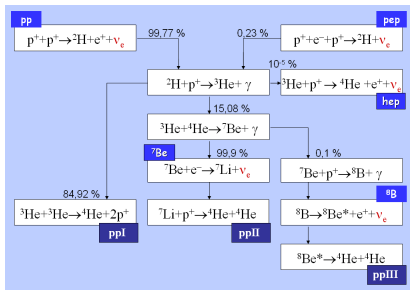


# Kwazistatyczna ewolucja gwiazdy

- Gdyby jedyną rolą reakcji termojądrowych było produkowanie energii, to wystarczyłoby obliczyć jej wydajność w danej temperaturze  $T$  i gęstości  $\rho$ .
- Reakcje jądrowe zmieniają także powoli skład izotopowy/chemiczny materii
- powyższe tak naprawdę decyduje o ewolucji gwiazdy w długiej skali czasowej: życia i śmierci gwiazdy.
- Także neutrino elektronowe  $\nu_e$  emitowane przez gwiazdy na etapie spalania wodoru są pochodzenia nuklearnego.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F(r) \equiv \frac{L}{4\pi r^2} = -D \frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d \ln T}{d \ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \dots) \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon(X_i, T, \rho) \\ \frac{dX_i}{dt} = F_i(X_j, T, \rho) \end{array} \right.$$

# Cykl pp vs CNO





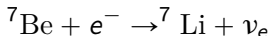
# Emisja neutrinowa Słońca

Obliczenie widma energetycznego neutrin słonecznych wymaga bardzo szczegółowego rozpatrzenia spalania wodoru:

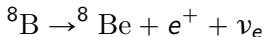
- cykl *ppI*
- cykl *ppII*
- cykl *ppIII*
- cykl CNO

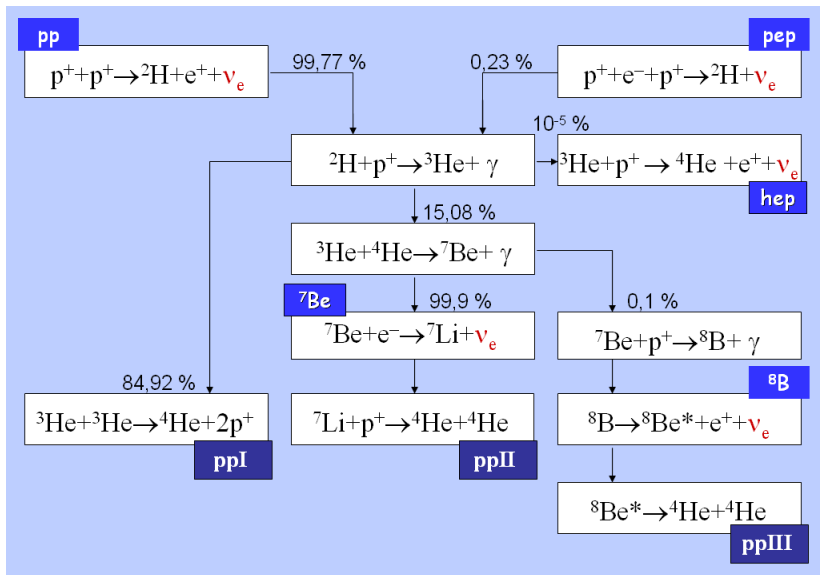
Wszystkie neutrino (w tym *pp* i *hep*) pochodzą z rozpadów  $\beta$  jąder. W Słońcu występują dwa typy takich reakcji, na przykład:

- 1 *ppII*: wychwytywanie elektronu (neutrino berylowe, pep)



- 2 *ppIII*: rozpad  $\beta^+$  (neutrino borowe, pp, hep, CNO)

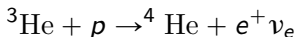




# Typy widma neutrinowego ze Słońca

	ciągłe	liniowe
rozpad $\beta^+$	${}^8\text{B}$ , $pp$ , $hep$ , CNO	—
wychwyt $e^-$	—	$pep$ , ${}^7\text{Be}$

- Reakcja  $hep$  jest analogiczna do  $pp$ :



- W cyklu CNO pojawiają się neutrino z rozpadów  ${}^{13}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$  oraz  ${}^{17}\text{F}$ .

# Widmo (anty)neutrinowe z rozpadu neutronu

Funkcyjną postać widma neutrinowego można łatwo zrozumieć analizując rachunek dotyczący prostszych procesów, np:

- rozpad  $\beta$  neutronu:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

- rozpad  $\beta$  mionu:

$$\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

W ogólności prawdopodobieństwo rozpadu  $\beta$  wynosi:

$$\frac{2\pi}{\hbar} \int \langle in|H|out \rangle^2 \delta(E_{in} - E_{out}) dN_e dN_\nu dN_{out}$$

Z rozpadu  $\mu$  otrzymujemy wartość stałej sprzężenia oddziaływań słabych, stałą Fermiego  $G_F$ , natomiast z czasu rozpadu neutronu wartość  $\langle in|H|out \rangle^2$  dla procesów z udziałem protonów, neutronów, elektronów i neutrin. Dalej zakładam, że  $\langle in|H|out \rangle^2 \propto M^2$  jest znaną wielkością liczbową.

# Widmo (anty)neutrinowe z rozpadu neutronu

Zakładam, że proton i neutron spoczywa, czyli ilość stanów końcowych protonu wynosi 1. Pozostaje całkowanie po ilości stanów końcowych elektronów  $dN_e = d^3 p_e / h^3$  i neutrin  $dN_\nu = d^3 p_\nu / h^3$ :

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - \mathcal{E}_\nu) d^3 p_e d^3 p_\nu.$$

Przechodzimy do układu sferycznego i całkując po wszystkich kierunkach elektronów i neutrin mamy:

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - \mathcal{E}_\nu) 4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu.$$

Dla elektronów  $E_e^2 - p_e^2 = m_e^2$ , dla neutrin  $\mathcal{E}_\nu = p_\nu$  ( $c = 1$ ). Całkowanie delty Diraca sprowadza się do wyrugowania energii elektronu, bądź neutrina. W teorii rozpadu  $\beta$  na ogół ruguje się  $\mathcal{E}_\nu$ , my robimy odwrotnie:

$$E_e = Q - E_\nu, \quad \text{gdzie: } Q = (m_n - m_p)c^2$$

czyli całkowite tempo rozpadu jest proporcjonalne do:

$$\lambda \propto \int_0^{Q-m_e} \sqrt{(Q - \mathcal{E}_\nu)^2 - m_e^2} (Q - \mathcal{E}_\nu) \mathcal{E}_\nu^2 d\mathcal{E}_\nu$$

# Widmo neutrin z procesów $\beta$

Wynik uogólniony na przypadek, gdy elektrony tworzą gaz Fermiego.

## Wychwyty elektronu

$$\frac{dF_\nu}{d\mathcal{E}_\nu} \propto \frac{\mathcal{E}_\nu^2 (\mathcal{E}_\nu - \Delta Q) \sqrt{(\mathcal{E}_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp[(\mathcal{E}_\nu - \Delta Q - \mu)/kT]} \Theta(\mathcal{E}_\nu - \Delta Q - m_e) \quad (1)$$

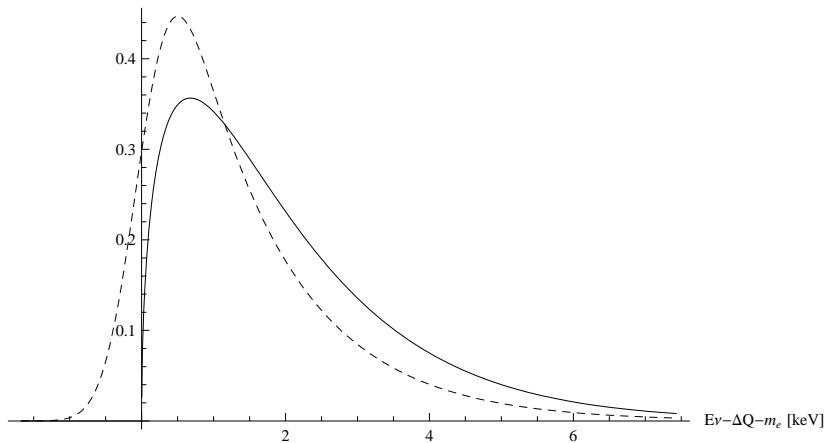
## Rozpad $\beta^+$

$$\frac{dF_\nu}{d\mathcal{E}_\nu} \propto \frac{\mathcal{E}_\nu^2 (\Delta Q - \mathcal{E}_\nu) \sqrt{(\mathcal{E}_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp(\mathcal{E}_\nu - \Delta Q + \mu)/kT} \Theta(\Delta Q - m_e - \mathcal{E}_\nu) \quad (2)$$

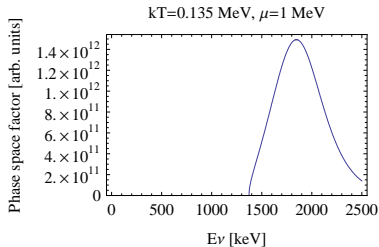
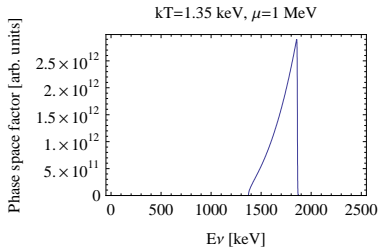
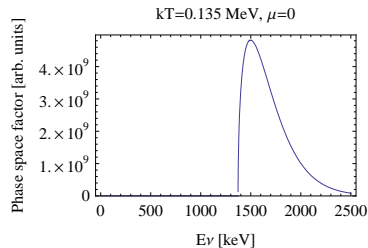
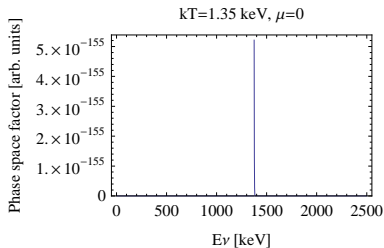
W przypadku Słońca gaz elektronowy jest niezdegenerowany ( $\mu = 0$ ), a jego temperatura znacznie niższa niż różnice mas jąder ( $\Delta Q \gg kT$ ). Powoduje to, że pierwsze widmo wygląda prawie jak  $\delta$  Diraca, natomiast drugie to prosta funkcja algebraiczna (licznik we wzorze powyżej).

# Widmo neutrin berylowych

Normalized  $\nu_e$  spectrum



# Widmo neutrin berylowych

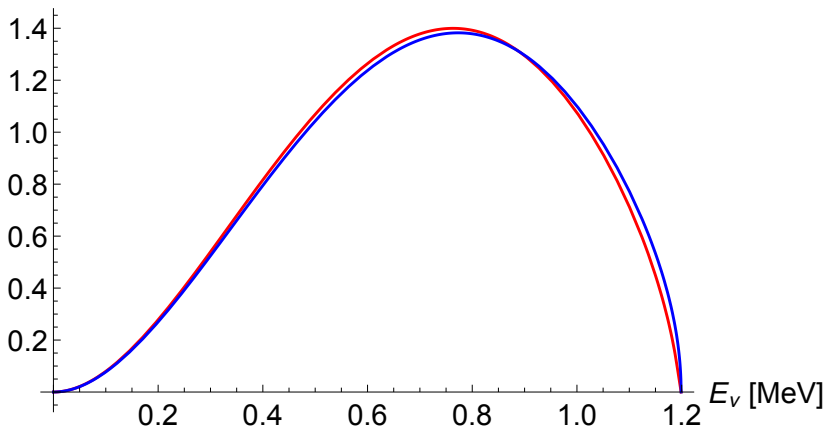




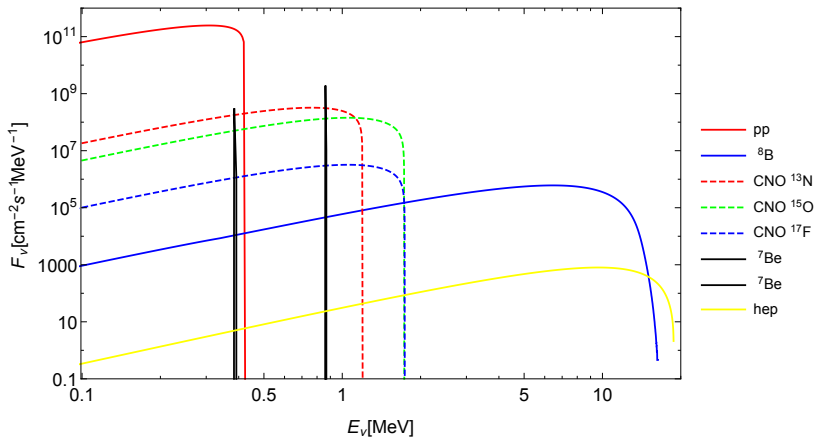
# Widmo neutrin z rozpadu $\beta^+$ $^{13}\text{N}$ (cykl CNO)

$$\frac{dF_\nu}{d\mathcal{E}_\nu} \propto \mathcal{E}_\nu^2 (\Delta Q - \mathcal{E}_\nu) \sqrt{(\mathcal{E}_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}$$

Znormalizowane do 1 widmo  $\nu_e$  z rozpadu  $^{13}\text{N}$



# Kompletne (prawie) widmo neutrin słonecznych



# Problem neutrin słonecznych

Problemem neutrin słonecznych nazywamy duży (aż do 50%) deficyt neutrin obserwowanych na Ziemi w porównaniu z teorią budowy gwiazdy.

## Współczesne wyjaśnienie

- neutrina są produkowane zgodnie z modelem Słońca i znanymi sieciami reakcji termojądrowych
- neutrina posiadają masę
- produkowane są w stanie kwantowym  $\nu_e$ , który nie posiada dobrze określonej masy, a propagują się jako stany własne masy, czyli są superpozycją  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$
- po drodze od centrum stany kwantowe ulegają mieszaniu, zarówno w Słońcu (poprzez oddziaływanie z elektronami, tzw. oscylacje w materii), jak i w próżni, a także wewnątrz Ziemi
- część neutrin, które narodziły się jako elektronowe, staje się mionowymi/taonowymi i nie jest wykrywana w niektórych detektorach

# Propagacja neutrin

- 1 neutrina są produkowane i wykrywane jako  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$
- 2 neutrina poruszają się jako stany własne masy:  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$
- 3 człon kinetyczny w funkcji Lagrange'a ma postać odpowiednio:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

lub:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

Macierz  $3 \times 3$  opisującą przejście od stanów o określonej masie do stanów o określonym zapachu nazywamy macierzą mieszania neutrin.

## Przybliżenie 2 zapachów

Aby nie zaciemniać opisu, ograniczymy się do mieszania  $\nu_e$  i  $\nu_\mu$ :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Ponieważ neutrina są skrajnie relatywistyczne, możemy uprościć zależność:

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} = p \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \simeq p \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{p^2} \right) = p + \frac{m^2}{2p}, \quad E \simeq p$$

Neutrino o masie  $m_1$  i  $m_2$  propagują się niezależnie, a funkcja falowa mnożona jest przez fazę. Zakładając, że pędy obu neutrin są identyczne, otrzymujemy wynik:

$$e^{\frac{(Ect - \vec{p} \cdot \vec{r})}{i\hbar}} \simeq e^{\frac{\frac{m^2}{2p} r}{i\hbar}}$$

Różnica fazy jest proporcjonalna do  $r/L$  gdzie,  $r$  - odległość od Słońca, długość mieszania neutrin  $L = \frac{2p}{\Delta m^2}$ , natomiast  $\Delta m^2$  jest różnicą kwadratów mas neutrin.

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 +  
streaming przez Microsoft Teams