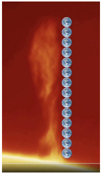
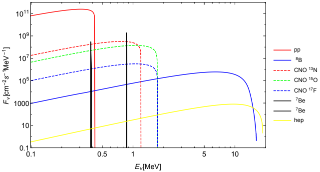
Podstawy astrofizyki i astronomii

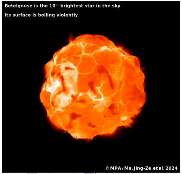
Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

26 marca 2024



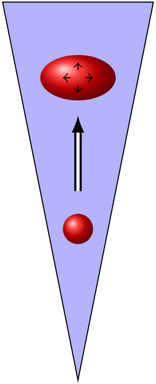




Transport energii: konwekcja

Konwekcja

Jeżeli tempo produkcji energii jest duże, a procesy przewodnictwa ciepła nie nadążają z jej odprowadzaniem, tworzą się warunki prowadzące do niestabilności hydrodynamicznych. Najważniejszy przykład to konwekcja.



Naszym celem jest wyznaczenie warunku krytycznego, opisującego sytuację gdy podgrzany bąbel materii (czerwony) unosi się do góry i rozszerza szybciej niż otaczająca go materia gwiazdy (niebieski).

- wielkości wewnątrz bąbla oznaczamy kolorem czerwonym i indeksem ad (proces adiabatyczny): $P(r), \rho(r), T(r)$
- wielkości na zewnątrz bąbla oznaczamy kolorem niebieskim i indeksem $\odot$ (symbol Słońca): $P(r), \rho(r), T(r)$

Konwekcja w 2D (YouTube)

Wyprowadzenie warunku konwekcji

- rozważamy bąbel gazu, który adiabatycznie (bez wymiany ciepła z otoczeniem) przemieszcza się o Δr w górę:

$$P = K\rho^{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}} = \gamma \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}}$$

- na tym samym odcinku Δr gęstość gazu doskonałego w gwieździe (Słońcu) zmieni się jak:

$$P = \frac{k_B}{\mu m_u}\rho T \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\odot} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\odot} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\odot}$$

- zakładamy, że ciśnienie w bąblu wyrównało się z ciśnieniem w gwieździe:

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\odot} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}}$$

- jeżeli gęstość wewnątrz bąbla spada szybciej niż gęstość w gwieździe, to zaczyna on się unosić jak balon na gorące powietrze:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}} \geqslant \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\odot} \rightarrow \left(\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}} \equiv \left(\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P}\right)_{\odot} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\odot} - \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\odot}$$

- warunek krytyczny na zaistnienie konwekcji

$$\boxed{\frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma}}$$

Prawie kompletny układ równań struktury gwiazdy

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F = -D\frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \ldots) \end{cases}$$

Powyżej mamy 5 funkcji niewiadomych:

- $m(r)$ – masa zawarta w kuli o promieniu r
- $P(r), \rho(r)$ – ciśnienie i gęstość w równowadze hydrostatycznej
- $T(r)$ – rozkład temperatury wewnątrz gwiazdy
- $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ – strumień energii przepływającej przez gwiazdę

Ciągle brakuje równania określającego źródło i tempo produkcji energii. Na razie cała energia $L(r) = L_\odot$ produkowana przez gwiazdę pojawia się bez uzasadnienia w punkcie $r = 0$.

Źródło energii gwiazdy

Dotąd konsekwentnie omijaliśmy pytanie: gdzie gwiazda produkuje energię niezbędną do świecenia?
Strumień energii L wypływający przez sferę o promieniu r musi być równy całce z objętościowego tempa produkcji energii ε:

$$L(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon r^2 \, dr \to \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon$$

Równanie to przyjmuje jeszcze prostszą postać, gdy zamiast r użyjemy masy m zawartej w kuli o promieniu r jako zmiennej radialnej:

$$\frac{dL(r)}{dm} = \varepsilon/\rho = \epsilon$$

gdzie ϵ jest tempem produkcji energii na jednostkę masy.

Kompletny układ równań

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi a D r^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{cases}$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ, temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i:

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$, $m(r)$, $T(r)$, $L(r)$.

- warunki początkowe:

$$\begin{cases} m(0) = 0, m(R_\odot) = M_\odot \\ P(0) = P_C, \rho(0) = \rho_C, \quad p(R_\odot) = \rho(R_\odot) = 0 \\ T(R_\odot) = T_\odot \end{cases}$$

- część warunków zadana jest w centrum, część na powierzchni: w praktyce bardzo trudno „trafić” w szukane rozwiązanie (np: metodą strzałów)
- konieczne rozwiązanie całego układu na raz, np: konwertując do układu algebraicznego metodą różnic skończonych (metoda Henyey-a)
- rozwiązanie wymaga „doklejenia” atmosfery gwiazdy
- nie jest to zadanie typu „wpisz w Mathematicę i użyj **NDSolve**”

Gwiazdy: reakcje termojądrowe

Synteza termojądrowa

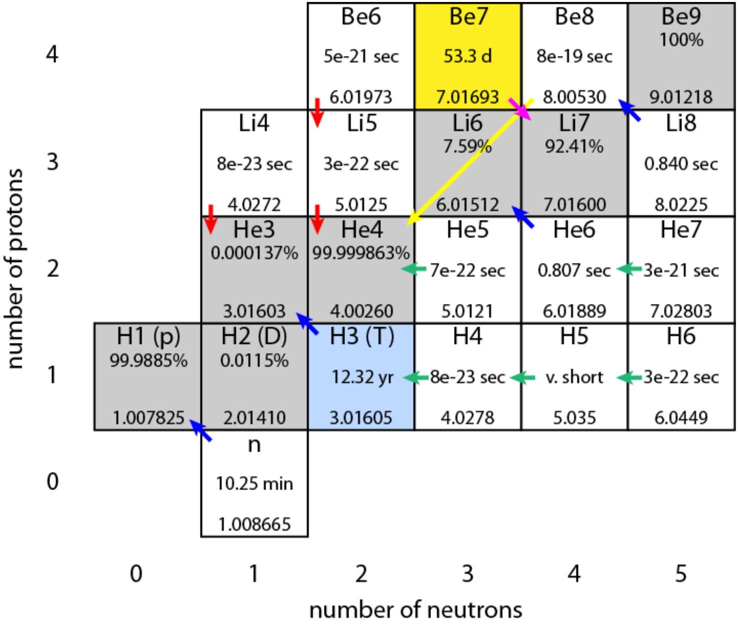
Współczesny model gwiazdy domyka obliczenie tempa produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej i powiązanej z nimi produkcji neutrin.

- co do zasady wzór $E = mc^2$ dobrze wyjaśnia źródło energii
- cztery atomy wodoru przekształcają się w atom helu
- masa atomu helu/cząstki α jest mniejsza niż masa 4 atomów wodoru/protonów
- różnica masy $(4m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{He}})c^2$ przekształcana jest na fotony γ i neutrina elektronowe ν_e
- neutrina z prędkością światła uciekają od razu, dlatego odejmuje się je od tempa produkcji energii (dla Słońca jest to 2%, ale dla presupernowej praktycznie 100%)

Powtórka z chemii jądrowej

Liczba protonów	Nazwa	Symbol	Name	Izotopy
Z=1	Wodór	H	Hydrogen	^{2}H, ^{3}H
Z=2	Hel	He	Helium	^{3}He, ^{4}He,
Z=3	Lit	Li	Lithium	
Z=4	Beryl	Be	Beryllium	
Z=5	Bor	B	Boron	
Z=6	Węgiel	C	Carbon	
Z=7	Azot	N	Nitrogen	
Z=8	Tlen	O	Oxygen	
...	...	...	...	

- Z – liczba protonów = ładunek elektryczny jądra
- N – liczba neutronów
- A = N+Z – liczba masowa
- symbol: ^{A}Z



Be6
5e-21 sec
6.01973
Be7
53.3 d
7.01693
Be8
8e-19 sec
8.00530
Be9
100%
9.01218
Li4
8e-23 sec
4.0272
Li5
3e-22 sec
5.0125
Li6
7.59%
6.01512
Li7
92.41%
7.01600
Li8
0.840 sec
8.0225
He3
0.000137%
3.01603
He4
99.999863%
4.00260
He5
7e-22 sec
5.0121
He6
0.807 sec
6.01889
He7
3e-21 sec
7.02803
H1 (p)
99.9885%
1.007825
H2 (D)
0.0115%
2.01410
H3 (T)
12.32 yr
3.01605
H4
8e-23 sec
4.0278
H5
v. short
5.035
H6
3e-22 sec
6.0449
n
10.25 min
1.008665
number of protons
0
1
2
3
4
number of neutrons
0
1
2
3
4
5

TABLE 4.1

Energy Release for Burning Stages

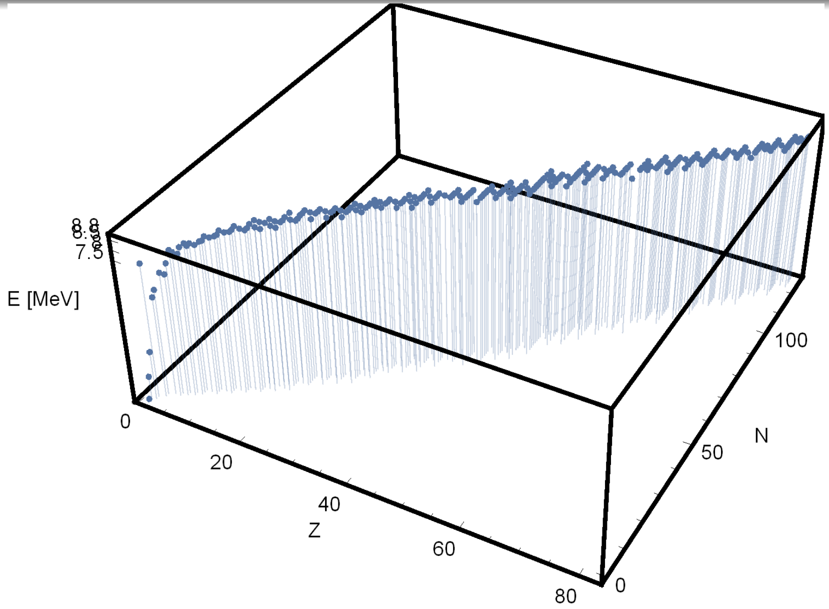
Process	$q(10^{18}$ erg/g$)$	q(MeV/nucleon)
$H \rightarrow {}^{4}He$	5 to 7	5 to 7
$3\alpha \rightarrow {}^{12}C$	0.585	0.606
$4\alpha \rightarrow {}^{16}O$	0.870	0.902
$2\,{}^{12}C \rightarrow {}^{24}Mg$	0.5	0.52
$2\,{}^{20}Ne \rightarrow {}^{16}O + {}^{24}Mg$	0.11	0.11
$2\,{}^{16}O \rightarrow {}^{32}S$	0.5	0.52
${}^{28}Si \rightarrow {}^{56}Ni$	0 to 0.3	0 to 0.31

Note: 1 MeV/Nucleon $= 0.964844 \times 10^{18}$ erg/g

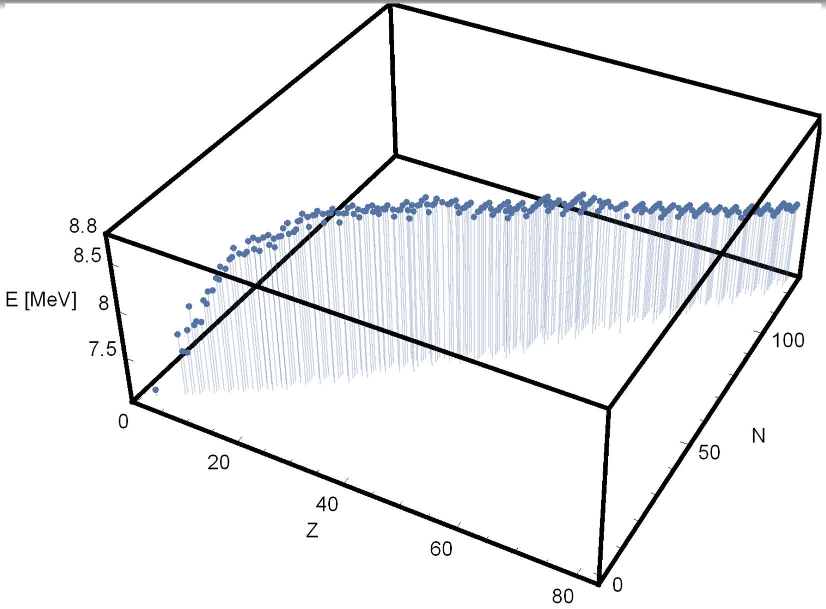
D. Arnett, Supernovae and Nucleosynthesis, Princeton U. Press, 1996

Źródło: D. Arnett, Supernovae & nucleosynthesis, str. 112.

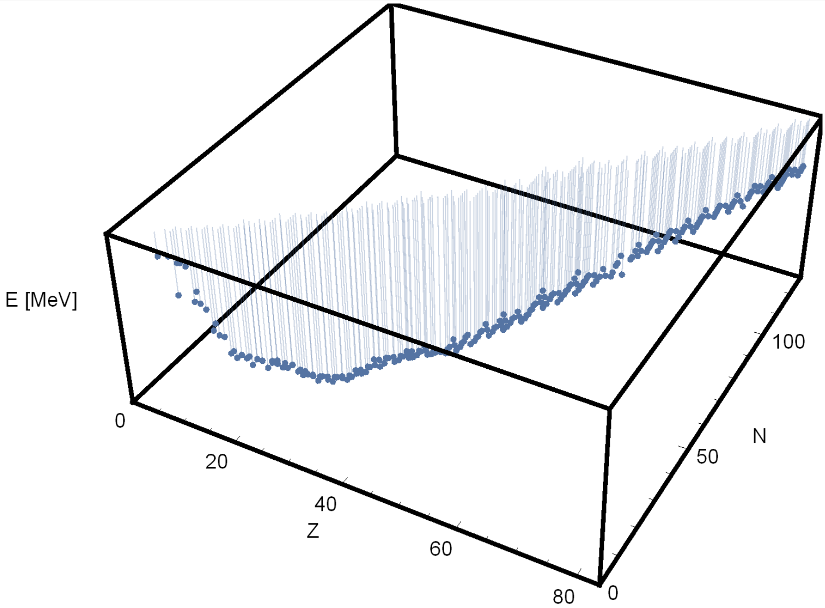
Energia wiązania jąder



Energia wiązania jąder



Energia wiązania jąder



Cykl *pp*

Kluczowe dla zrozumienia procesu syntezy jądrowej z wodoru w gwiazdach są następujące fakty:

- jądro wodoru to proton
- nie istnieją stabilne jądra atomowe, które nie posiadają neutronów
- oddziaływania silne nie zamieniają protonów w neutrony
- proces zamiany protonu w neutron zachodzi przez oddziaływania słabe i jest związany z emisją neutrina ν_e
- zachowanie ładunku elektrycznego Q jest oczywiste
- zachowana musi być liczba barionowa B i leptonowa L_e
- zachowana jest energia, pęd i moment pędu (wliczając spin) oraz parzystość (oprócz o. słabych)
- „reguła kciuka": reakcja zachodzi najszybciej przez oddziaływania silne, chyba że jest zabroniona przez prawa zachowania – drugie w kolejności są oddziaływania elektromagnetyczne, na końcu słabe

Cykl pp

Rozważmy podstawową (pierwszą) reakcję cyklu pp, w której produkowany jest deuter (^{2}H, czasem oznaczany jako d lub D):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
p^+ & + & p^+ & \rightarrow & {}^2\mathrm{D} & + & e^+ & + & \nu_e \\
 & & & & & & & & \\
B=1 & & B=1 & & B=2 & & B=0 & & B=0 \\
Q=1 & & Q=1 & & Q=1 & & Q=1 & & Q=0 \\
L=0 & & L=0 & & L=0 & & L=-1 & & L=1
\end{array}
$$

Kolejna reakcja zachodzi przez oddziaływania elektromagnetyczne:

$$ {}^2\mathrm{D} + p^+ \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma $$

Hel ^{3}He wchodzi w różne reakcje, co powoduje rozgałęzienie się cyklu, np:

1. cykl ppI: $^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2p^+$
2. cykl $ppII, ppIII$: $^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^7\mathrm{Be} + \gamma$

Sieć reakcji jądrowych

Formalnie mogą występować wszystkie możliwe reakcje dozwolone przez prawa zachowania. W praktyce tempo większości z nich jest pomijalnie małe, co uzasadnia użycie tempa reakcji równego zero, czyli całkowite pominięcie danej reakcji w dalszych rozważaniach.

Przykład: przyjmujemy, że w Słońcu nie zachodzą możliwe w innych warunkach reakcje:

- $^2\mathrm{H}+^2\mathrm{H} \rightarrow ^3\mathrm{He} + n + 3.27$ MeV
- $^2\mathrm{H} + ^2\mathrm{H} \rightarrow ^3\mathrm{H} + p + 4.03$ MeV
- $^2\mathrm{H} + ^2\mathrm{H} \rightarrow ^4\mathrm{He} + \gamma$ (= 23.85 MeV)

Sieć reakcji tego typu określamy jako hardwired network.

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe w czystym wodorze, zgodne z zasadami zachowania:

1. $p^+ + p^+ \rightarrow {}^2\mathrm{H} + e^+ + \nu_e$
2. $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e$
3. $p^+ + e^- + p^+ \rightarrow {}^2\mathrm{H} + \nu_e$
4. $p^+ + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$

Reakcja 1 wymaga pokonania bariery potencjału elektrostatycznego, co jest możliwe poprzez tunelowanie kwantowe.
Reakcja 2 jest endotermiczna, czyli wymaga dostarczenia energii około 0.8 MeV w postaci temperatury lub/i potencjału chemicznego.
Reakcja 3 jest bardzo mało prawdopodobna, gdyż wymaga spotkania 3 cząstek.
Reakcja 4 nie może zachodzić z braku źródła antyneutrin; przekrój czynny jest przynajmniej 20 rzędów wielkości mniejszy niż dla pozostałych reakcji.

„Wyprowadzenie” cyklu *pp*

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru i wodoru:

1. $p^+ + d \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma$
2. $p^+ + d \rightarrow {}^3\mathrm{H} + e^+ + \nu_e$
3. $d + d \rightarrow {}^3\mathrm{He} + n$
4. $d + d \rightarrow {}^3\mathrm{H} + p$
5. $d + d \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \gamma$

1. reakcja zachodzi szybko, przez oddziaływania elektromagnetyczne
2. reakcja zachodzi wolno, przez oddziaływania słabe
3. reakcja mało prawdopodobna, z powodu małego stężenia deuteru
4. jak wyżej
5. proces elektromagnetyczny wolniejszy $\alpha \simeq 1/137$ razy od procesów „silnych” podanych wyżej

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy niektóre możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru, wodoru i ^{3}He:

1. $^3\mathrm{He} + ^3\mathrm{He} \rightarrow ^4\mathrm{He} + 2p^+$
2. $^3\mathrm{He} + ^3\mathrm{He} \rightarrow ^5\mathrm{He} + p^+ + e^+ + \nu_e$
3. $^3\mathrm{He} + ^3\mathrm{He} \rightarrow ^4\mathrm{Li} + d(= p + n)$
4. $^3\mathrm{He} + ^3\mathrm{He} \rightarrow ^6\mathrm{Be} + \gamma$
5. $^3\mathrm{He} + ^3\mathrm{He} \rightarrow ^5\mathrm{Li} + p^+$

1. reakcja zachodzi bardzo szybko, przez oddziaływania silne
2. reakcja zachodzi bardzo wolno, przez oddziaływania słabe
3. reakcja endotermiczna
4. proces elektromagnetyczny; produkt czyli ^{6}Be natychmiast (0.5×10^{-20} sekundy) rozpada się na ^{5}Li wyrzucając proton, po czym ^{5}Li w taki sam sposób rozpada się do ^{4}He — reakcja okazuje się równoważna pierwszej
5. ^{5}Li rozpada się przez wyrzut protonu z czasem 3×10^{-22} sekundy

Cykl *ppI*

Wynik powyższych rozważań daje cykl *ppI*:

$$\begin{aligned} p+p &\rightarrow d+e^{+}+\nu_e \\ p+d &\rightarrow {}^3\mathrm{He}+\gamma \\ {}^3\mathrm{He}+{}^3\mathrm{He} &\rightarrow {}^4\mathrm{He}+2p \end{aligned}$$

lub raczej:

$$\begin{aligned} p+p &\rightarrow d+e^{+}+\nu_e \\ e^{+}+e^{-} &\rightarrow 2\gamma \\ p+p &\rightarrow d+e^{+}+\nu_e \\ e^{+}+e^{-} &\rightarrow 2\gamma \\ p+d &\rightarrow {}^3\mathrm{He}+\gamma \\ p+d &\rightarrow {}^3\mathrm{He}+\gamma \\ {}^3\mathrm{He}+{}^3\mathrm{He} &\rightarrow \alpha+2p \end{aligned}$$

W skrócie:

$$4p+2e^{-} \rightarrow \alpha+2\nu_e+6\gamma$$

Rola fotonów, neutrin, neutronów i pozytonów

W procesie syntezy termojądrowej, oprócz jąder, biorą udział inne cząstki:

- fotony γ ulegają termalizacji i uwzględniamy je pośrednio poprzez własności termodynamiczne materii
- neutrina natychmiastowo opuszczają wnętrze gwiazdy i można po prostu odjąć ich energię od sumarycznego ciepła reakcji; dla Słońca ich strumienie i rozkład energetyczny są starannie liczone, gdyż stale je obserwujemy na Ziemi – zwykle nie są uwzględniane w sieci reakcji, za wyjątkiem supernowych typu „II”
- swobodne neutrony w Słońcu praktycznie nie są produkowane i nie wchodzą w skład sieci reakcji; w innych gwiazdach bywają stale obecne i muszą być uwzględniane
- pozytony zaraz po wytworzeniu anihilują z elektronami: $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$; dla $kT \sim m_e$ są stale obecne

Bilans energetyczny cyklu *ppI*

Na masę atomu składa się:

1. masa jądra atomowego – dominująca część
2. masa elektronów – mała, ale istotna część
3. energia wiązania powłok elektronowych – pomijalnie mała

Masę jąder/atomów można podać na kilka równoważnych sposobów:

- w atomowych jednostkach masy, *amu* lub *u*, równych $\frac{1}{12} m_{^{12}\mathrm{C}}$
- poprzez energię wiązania Q:

$$m_{^A Z} = N m_n + Z m_{\mathrm{H}} - Q/c^2$$

  Energia wiązania często podawana jest na nukleon, i we wzorze powyżej musimy ją przemnożyć przez $A = N + Z$
- jako deficyt masy $\Delta m = \Delta E/c^2$, poniżej mierzony względem $^{12}\mathrm{C}$:

$$(Z \Delta m_{\mathrm{H}} + N \Delta m_n - \Delta m_{^A Z}) = A \frac{Q}{A}$$

Bilans energetyczny cyklu *ppI* c.d.

Bilans masy cyklu *ppI* można zapisać w skrócie jako:

$$4m_p + 2m_e - m_\alpha = Q$$

gdzie m_p – masa protonu, m_e - masa elektronu, m_α – masa cząstki alfa, natomiast Q to energia w postaci promieniowania: fotonów i neutrin.
Pamiętając, że masy atomów to:

$$m_{\mathrm{H}} = m_p + m_e, \qquad m_{^4\mathrm{He}} = m_\alpha + 2m_e$$

otrzymujemy po prostu:

$$4m_{\mathrm{H}} - m_{^4\mathrm{He}} = Q \simeq 26.73\ \mathrm{MeV}$$

Odjęcie energii neutrin jest możliwe tylko w sensie uśrednionym, gdyż w każdym pojedynczym zdarzeniu jest ona inna. Jest to około 0.5 MeV, przypadkowo wartość bliska masy elektronu, relatywnie 2% całej produkowanej energii.

Chcesz wiedzieć więcej?

Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 + streaming przez Microsoft Teams