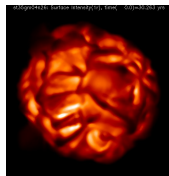
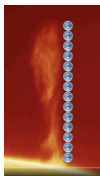


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

19 marca 2024



Zrozumieć gwiazdy

Astrofizyczny opis gwiazdy składa się z czterech składników:

- 1 struktura hydrostatyczna (równowaga gradientu ciśnienia i grawitacji):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2},$$

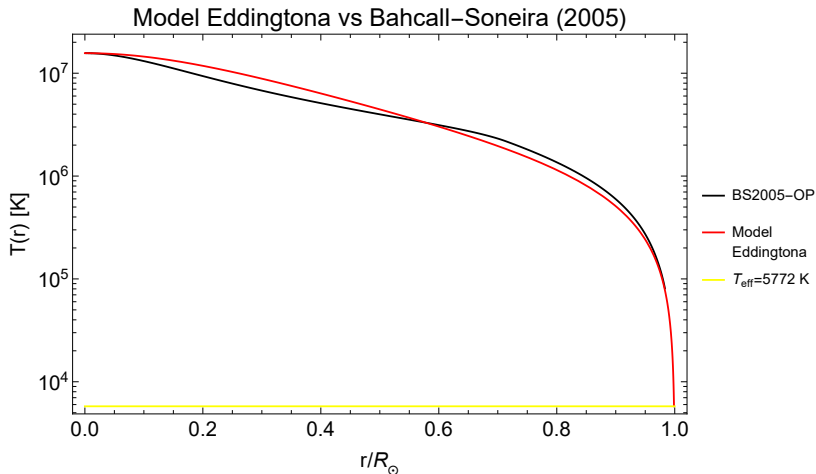
- 2 zachowanie masy/związek rozkładu masy z grawitacją:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

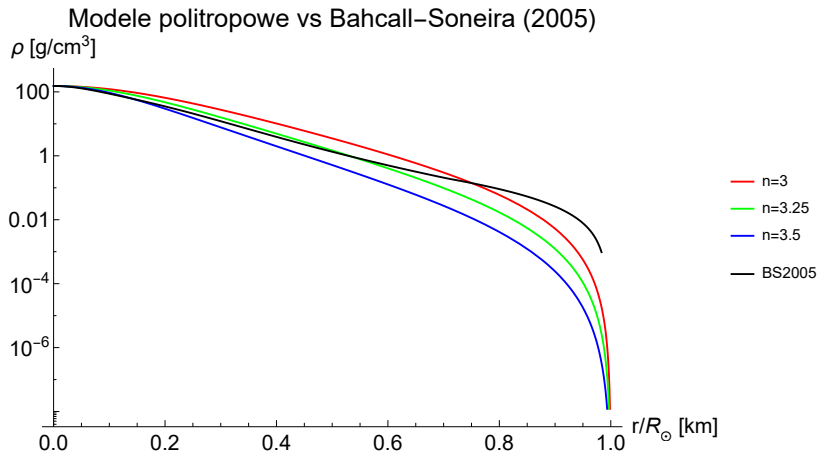
- 3 transport energii/pomienienia (gwiazdy świecą!),
- 4 produkcja/źródło energii (reakcje termojądrowe).

Docelowo potrzebujemy 4 równań, których rozwiązanie wyznaczy pełną strukturę gwiazdy: ciśnienie $P(r)$, gęstość $\rho(r)$, temperaturę $T(r)$, strumień energii $L(r)$ i skład chemiczny/izotopowy $X_i(r)$. Warunki brzegowe wyznaczają masę całkowitą $M(R)$, promień R , temperatura powierzchniowa $T(R)$ oraz jasność gwiazdy $L(R)$. Początkowy skład chemiczny wynika z nukleosyntezy kosmologicznej (Wielkiego Wybuchu).

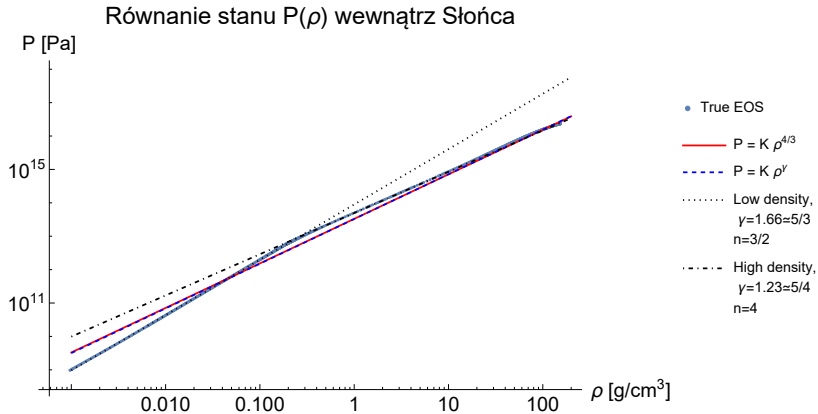
Politropa (M. Eddingtona) vs Std. Model Słońca



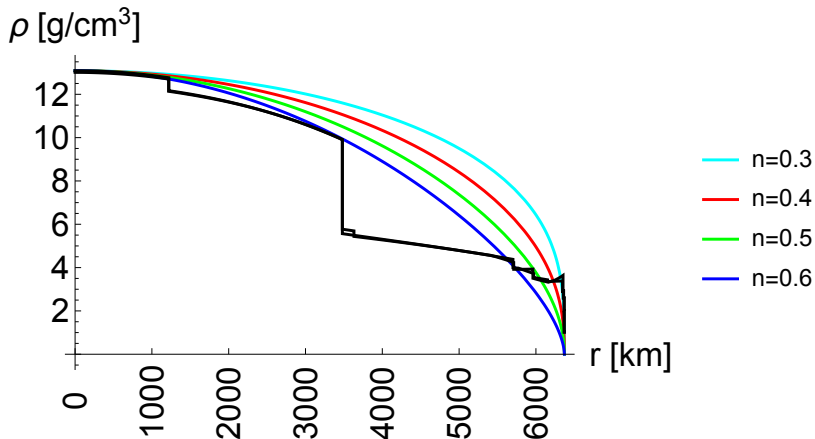
Politropa (M. Eddingtona) vs Std. Model Słońca



Politropa (M. Eddingtona) vs Std. Model Słońca



Politropowy model Ziemi vs PREM



Formowanie gwiazdy

Skala dynamiczna

Rozważmy kulę „pyłu” o promieniu $R(t)$ i masie M zapadającą się pod wpływem własnego przyciągania grawitacyjnego.

Czas kolapsu jest równy czasowi spadku swobodnego w polu masy punktowej. Z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R_0} + \frac{GMm}{R(t)}, \quad v = \frac{dR(t)}{dt}$$

Czas kolapsu T wynosi:

$$T = \frac{1}{2GM} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}}} = \sqrt{\frac{R_0^3}{2GM}} \frac{\pi}{2}$$

Wynik podaje się zwykle poprzez gęstość średnią kuli $\bar{\rho}$:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$$

Dla Słońca $T \simeq 0.5$ godziny.

Twierdzenie wirialne

Całkujemy obie strony równania równowagi hydrostatycznej pomnożone przez $4\pi r^3$:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gmp}{r^2} \rightarrow \int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^R 4\pi r^3 \frac{Gmp}{r^2} dr$$

Lewą stronę całkujemy przez części:

$$4\pi r^3 P(r) \Big|_0^R - 3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr = -3 \int_V P dV$$

natomiast prawa to grawitacyjna energia potencjalna:

$$\int_0^R -\frac{Gmp}{r} 4\pi r^2 dr = \int_V -\frac{Gmp}{r} dV$$

Otrzymujemy wynik znany jako twierdzenie wirialne:

$$E_{\text{graw}} + 3 \int_V P dV = 0$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza

Energia wewnętrzna gazu doskonałego to $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody. Dla gazu jednoatomowego, gęstość tej energii ϵ to:

$$P = \frac{2}{3}\epsilon$$

Z twierdzenia wirialnego mamy:

$$\Delta E_{\text{term}} = \frac{1}{2}\Delta E_{\text{graw}}$$

czyli połowa wyzwolonej energii grawitacyjnej „podgrzewa” gwiazdę. Druga połowa jest wyświecana ze średnią jasnością L . Czas świecenia „Słońca” kosztem energii grawitacyjnej nazywamy skalą czasową Kelvina-Helmholtza:

$$\tau_{KH} = \frac{\Delta E_{\text{graw}}}{L_{\odot}}$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza II

- energia grawitacyjna np: jednorodnej kuli o masie M i promieniu R to:

$$E_{\text{graw}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- energia ta jest nieskończona dla $R \rightarrow 0$, Słońce mogłoby świecić dowolnie długo
- nas interesuje czas świecenia przy kurczeniu się od $r \simeq 1 \text{ AU} \sim \infty$ do $r = R_{\odot}$
- wynosi on około $\tau_{\text{K-H}} \sim 10$ milionów lat
- na mocy twierdzenia wirialnego nieunikniony jest stały wzrost energii termicznej, a więc temperatury, w trakcie kurczenia się „gwiazdy”
- pojęcie „gwiazda Kelvina-Helmholtza” stosuje się wszędzie tam, gdzie źródłem wypromieniowanej energii jest energia grawitacyjna (kurczenie się obiektów) np:

- 1 powstawanie gwiazdy z obłoku
- 2 kurczenie się protogwiazdy neutronowej (promieniowanie to neutrino)

Transport energii: promieniowanie

Zgodnie z prawami termodynamiki energia (ciepło) przepływa od obszarów o temperaturze wyższej do obszarów o temperaturze niższej. Strumień energii F jest proporcjonalny do różnicy temperatur T :

$$F \propto - \frac{dT}{dr}$$

- w typowych sytuacjach astrofizycznych temperatura spada w miarę oddalania się od centrum.
- powyższe nie jest prawem, istnieją wyjątki, np:
zdegenerowane jądro chłodzone neutrinowo + spalanie w warstwie sferycznej (ang. shell burning)
- współczynnik proporcjonalności jest funkcją zależną od składu „chemicznego” materii X_i , temperatury, gęstości, ciśnienia i zjawisk odpowiedzialnych za przepływ energii

Najważniejsze procesy odpowiedzialne za przepływ energii

- 1 transport promienisty
- 2 konwekcja
- 3 przewodnictwo cieplne

Transport promieniowania

Pod pojęciem promieniowania rozumiemy cząstki „bezmasowe”, poruszające się z prędkością światła c :

- 1 fotony γ (przede wszystkim)
- 2 neutrino $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ (w ekstremalnych sytuacjach: supernowe typu implozyjnego, protogwiazdy neutronowe, dyski akrecyjne wokół czarnych dziur)

Pełny opis promieniowania wymaga podania w każdym punkcie gwiazdy $\vec{r} = \{x, y, z\}$ rozkładu prawdopodobieństwa f kątów pod jakimi poruszają się fotony i rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów. Daje to w sumie sześć zmiennych, a obliczenia uwzględniające je wszystkie określamy jako symulacje 6D .

Konieczne jest rozwiązanie równania transportu Boltzmannna:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{reakcje z fotonami}$$

W praktyce często możliwe jest drastyczne uproszczenie powyższego opisu.

Lokalna równowaga termodynamiczna (LTE)

Warunki panujące wewnątrz Słońca:

- 1 średnia droga swobodna fotonu $L_\gamma \sim 2$ cm, wynikająca głównie z rozpraszania na swobodnych elektronach pochodzących ze zjonizowanego wodoru
- 2 średni spadek temperatury na drodze od centrum $T_c \simeq 10^7$ K do powierzchni $T \simeq 5800$ K:

$$\frac{T_c - T_\odot}{R_\odot} \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$$

Wnioski są następujące:

- 1 układ jest niemal w równowadze termicznej
- 2 promieniowanie ciała doskonale czarnego (gaz fotonowy) jest poprawnym opisem rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów
- 3 strumień energii emitowany na zewnątrz i do wewnątrz w odległości L_γ kasuje się z dokładnością około $\sigma \Delta T^4 \sim 10^{-10}$

W stanie LTE (Local Thermodynamic Equilibrium) transport fotonów można rozpatrywać przynajmniej z dwóch punktów widzenia:

- 1 jako proces dyfuzji gazu fotonowego pomiędzy rejonami o różnej gęstości fotonów
- 2 jako proces błędzenia przypadkowego fotonu

Pierwszy z opisów jest wygodniejszy z punktu widzenia równań struktury i ewolucji gwiazdy, drugi jest bardziej ilustratywny i pozwala powiązać makroskopowy współczynnik dyfuzji z mikroskopowymi procesami oddziaływania fotonów z materią (przekrojami czynnymi).

Celem kolejnych rachunków jest wyprowadzenie związku pomiędzy współczynnikiem dyfuzji D energii gazu fotonowego a średnią drogą swobodną w procesie błądzenia przypadkowego fotonu.

Kolejno przedstawiane kroki rozumowania to:

- 1 analityczne rozwiązanie równania dyfuzji o współczynniku D w przypadku „fotonów” początkowo skoncentrowanych w $\vec{r}=0$ (rozpływający się pik gaussowski)
- 2 numeryczne zasymulowanie procesu błądzenia fotonów ze średnią drogą swobodną L_γ zaczynając od $\vec{r}=0$
- 3 wywnioskowanie analitycznej postaci rozkładu prawdopodobieństwa w zależności od ilości skoków dla dużej liczby fotonów (rozkład normalny/Gausa)
- 4 przeliczenie liczby kroków k na czas $ct = kL_\gamma$
- 6 porównanie wyników

Oczekiwany wynik to:

$$D = \frac{1}{3} c L_\gamma$$

Dyfuzja fotonów: równanie dyfuzji

Równanie opisujące zachowanie energii ma postać:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \vec{F} = 0, \quad \vec{F} = -D \nabla \epsilon$$

gdzie \vec{F} to strumień energii. Łącząc powyższe dostajemy równanie dyfuzji:

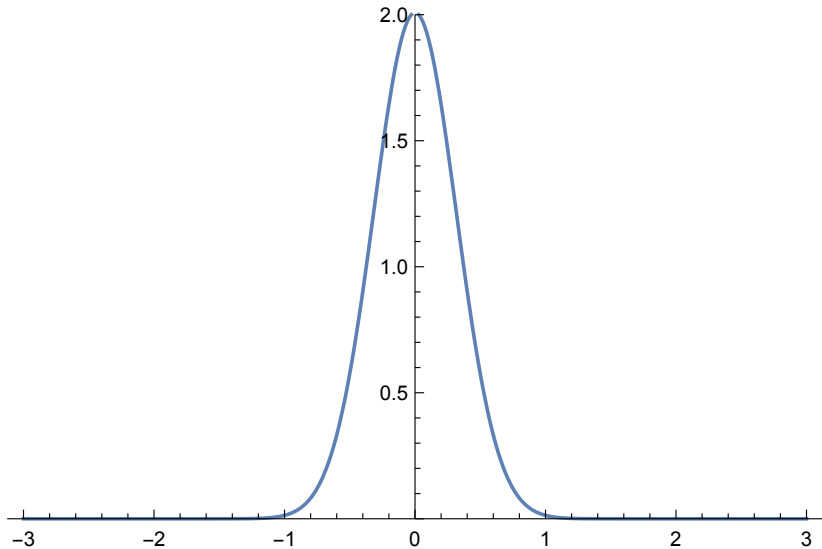
$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = D \Delta \epsilon$$

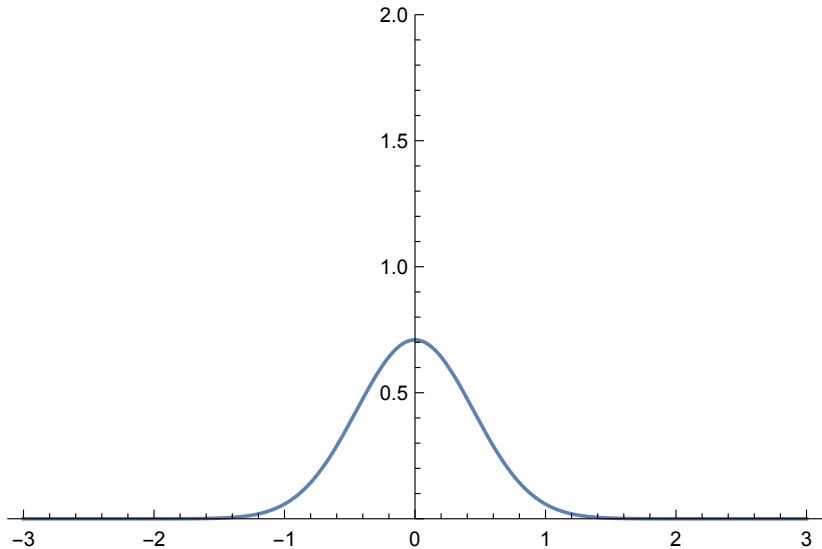
gdzie D to współczynnik dyfuzji, a $\Delta \epsilon \equiv \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2}$ to operator Laplace'a w 3D.

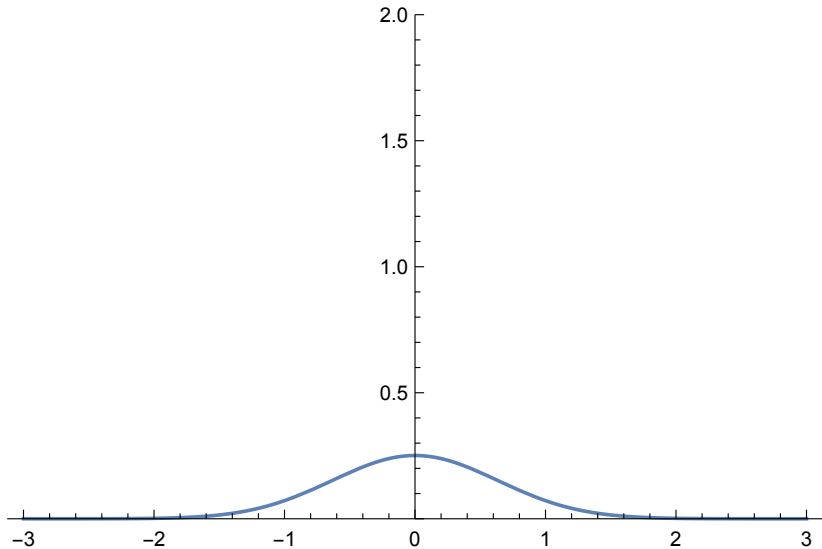
Funkcja Greena równania dyfuzji w N wymiarach:

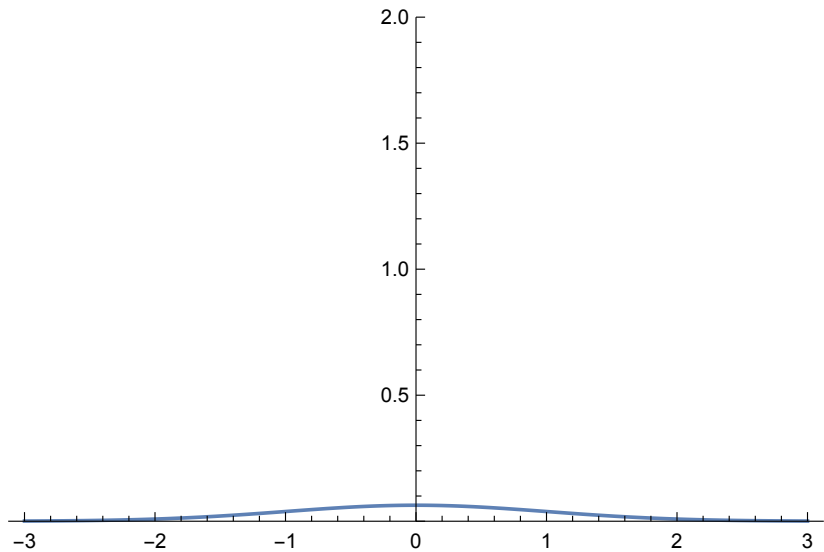
$$\epsilon(\vec{r}, t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}^N}$$

opisuje „rozpylanie” się skoncentrowanej początkowo w $\vec{r} = \vec{0}$ energii.









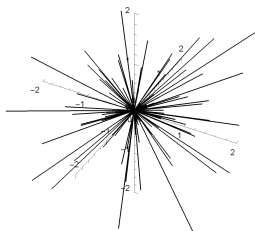
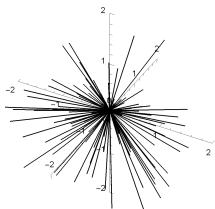
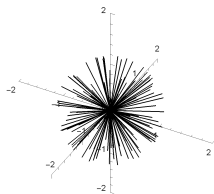
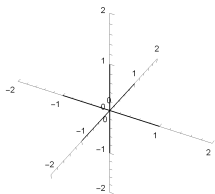
Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe

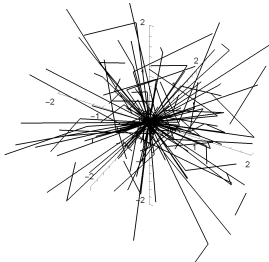
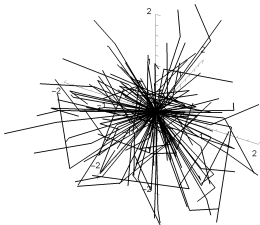
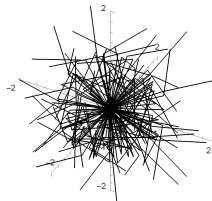
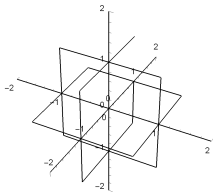
Zamiast dyfuzji, możemy rozważyć proces błędzenia przypadkowego fotonów, wykonujących skoki o średniej długości swobodnej L_γ w przypadkowych kierunkach.

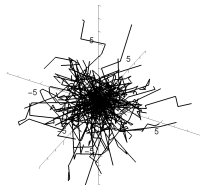
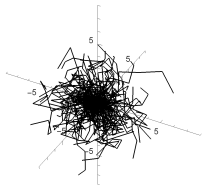
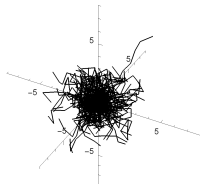
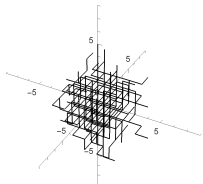
Aby powiązać dyskretny proces z ciągłym, zauważamy, że skok fotonu na odległość L_γ wymaga czasu Δt , gdzie:

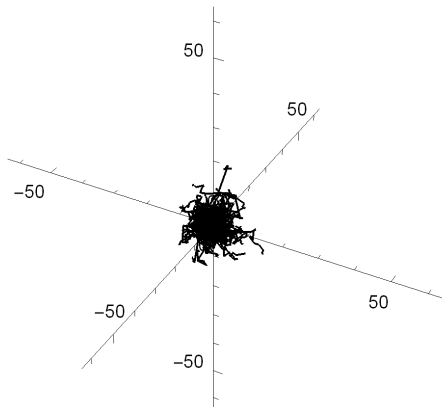
$$c\Delta t = L_\gamma,$$

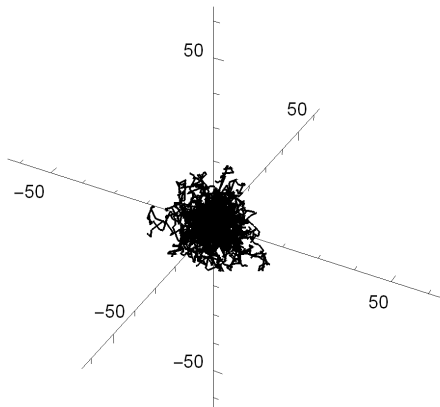
gdzie c to prędkość światła w próżni. Czyli po k -tym przeskoku w błędzeniu przypadkowym upływa czas $t = k\frac{L_\gamma}{c}$.

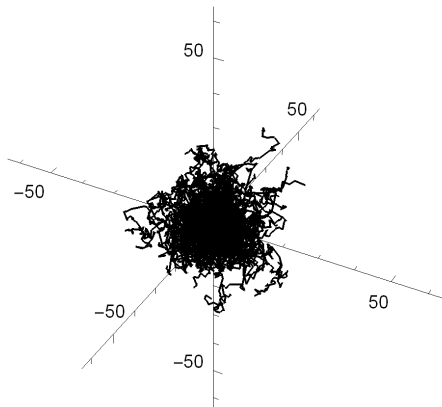


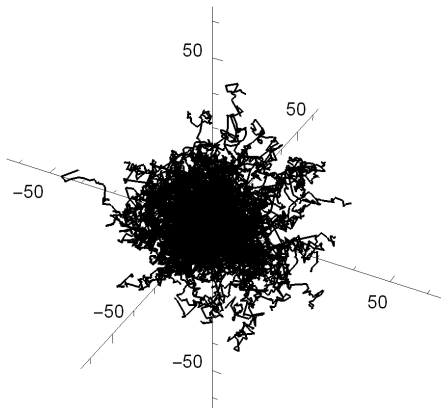


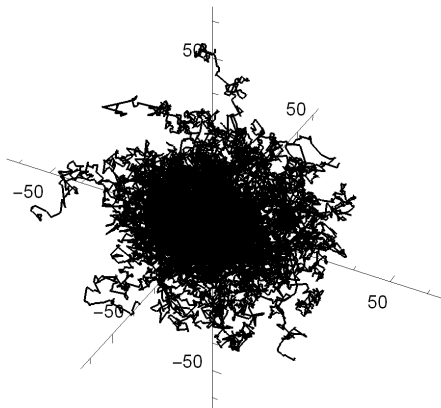


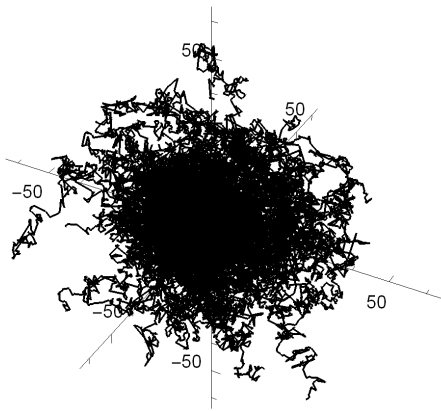












Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe

W teorii błędzenia przypadkowego dowodzi się, że prawdopodobieństwo przyjmuje w granicy postać rozkładu Gaussa. Przez porównanie, współczynnik dyfuzji D w 3 wymiarach to:

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{6\Delta t} = \frac{\langle r \rangle^2 + \sigma^2}{6\Delta t} = \frac{L_\gamma^2}{6\Delta t} + \frac{\sigma^2}{6\Delta t} = \frac{1}{6} q c L_\gamma$$

gdzie $L_\gamma/\Delta t = c$ oraz:

$$\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle^2 + \sigma^2, \quad q > 0.$$

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa długości skoku to:

- średnia $\langle r \rangle = L_\gamma$
- wariancja σ

Jeżeli wariancja jest proporcjonalna do średniej długości swobodnej L_γ , to jej wpływ można zaabsorbować do współczynnika liczbowego q .

Współczynnik dyfuzji w błędzeniu przypadkowym

Przykłady o różnych rozkładach długości skoku (średnia zawsze wynosi L_γ):

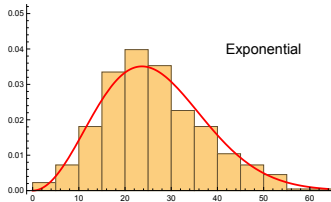
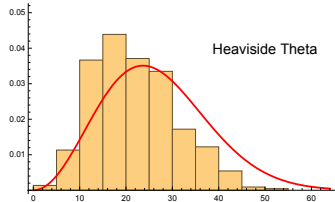
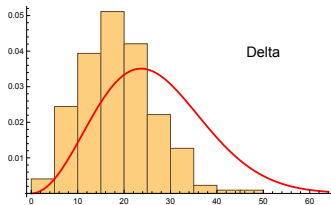
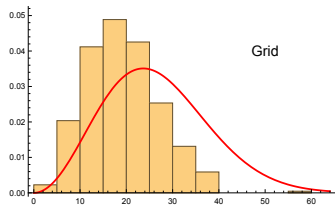
- skoki o jednakowej długości:
 - $P(r) = \delta(r - L_\gamma)$,
 - $\langle r \rangle = L_\gamma$,
 - $\sigma = 0$,
 - $q = 1$
- skoki o długości od zera do $2L_\gamma$ i równomiernym rozkładzie:
 - $P(r) = \Theta(2L_\gamma - r)/(2L_\gamma)$,
 - $\langle r \rangle = L_\gamma$
 - $\sigma = L_\gamma/\sqrt{3}$,
 - $q = 4/3$
- rozkład wykładniczy („Poissona”)
 - $P(r) = e^{-r/L_\gamma}/L_\gamma$,
 - $\langle r \rangle = L_\gamma$,
 - $\sigma = L_\gamma$,
 - $q = 2$

Tylko dla rozkładu wykładniczego (eksponencjalnego) średnia i wariancja są sobie równe i wynoszą $\langle r \rangle = \sigma = L_\gamma$ co daje $q = 2$ i podwojony współczynnik dyfuzji:

$$D = \frac{1}{3} L_\gamma c$$

Inne, poprawne wyprowadzenie powyższego wzoru polega na przybliżaniu równania transportu promieniowania.

Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe vs dyfuzja



Przekrój czynny a średnia droga swobodna

Porównanie równania dyfuzji z błędzeniem przypadkowym pozwala nam jednoznacznie powiązać makroskopowy proces dyfuzji energii promienistej, opisany współczynnikiem dyfuzji D , z mikroskopowym procesem oddziaływania fotonów z materią, opisanym średnią drogą swobodną L_γ .

Strumień energii

$$F_\gamma = -D \frac{d(aT^4)}{dr} = -\frac{4}{3} acL_\gamma T^3 \frac{dT}{dr}, \quad D = \frac{1}{3} L_\gamma c$$

Standardowo prawdopodobieństwo oddziaływania „fotonu” z tarczą opisujemy za pomocą przekroju czynnego:

$$L_\gamma = \frac{1}{\sigma n}$$

gdzie: n - gęstość „atomów” tarczy, σ - całkowity przekrój czynny na oddziaływanie (zderzenie, absorpcja).

Przekrój czynny: przykład

Obliczanie przekrojów czynnych to standardowe zadanie fizyki cząstek elementarnych, jądrowej i atomowej.

W gwiazdach istotne są następujące procesy z udziałem fotonów:

- 1 rozpraszanie na swobodnych elektronach, (przekrój czynny Thomsona):

$$\sigma = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} \simeq 6.65 \times 10^{-29} m^2$$

- 2 procesy atomowe: przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi lub/i stanami swobodnymi

$$\sigma = \sigma(E_\gamma)$$

Średnia nieprzeźroczystość Rosselanda

Średnią długość swobodną można wyrazić także za pomocą nieprzeźroczystości κ i gęstości ρ :

$$L_\gamma = \frac{1}{\kappa\rho}.$$

W praktyce używa się średniej harmoniczej ważonej pochodną temperaturową rozkładu Plancka:

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^\infty \frac{\partial B(x)}{\partial T} \frac{dx}{\sum_i \kappa_i(x)}, \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

gdzie:

$$\frac{\partial B(x)}{\partial T} = \frac{15}{\pi^4} \frac{4}{\sinh^2(x/2)}$$

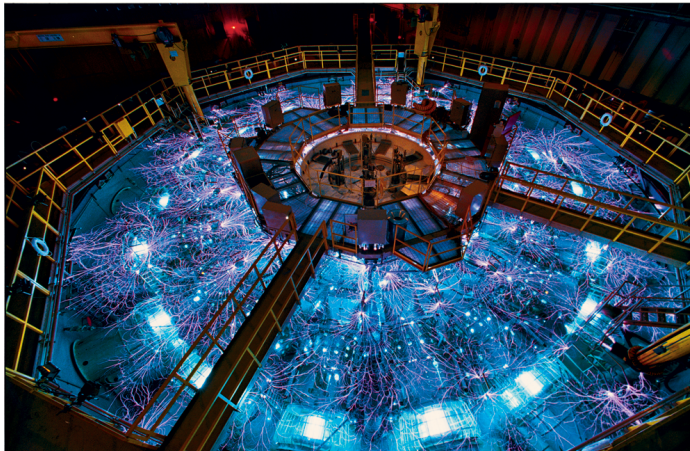
Suma rozciąga się na wszystkie możliwe procesy, atomy i ich stany zjonizowane.

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL

<http://opalopacity.llnl.gov/>, i jego kontynuacje, np:

<http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html>



W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL

<http://opalopacity.llnl.gov/>, i jego kontynuacje, np:

<http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html>



Średnia droga swobodna fotonu w modelu Eddingtona

W modelu Eddingtona gęstość energii gazu fotonowego to:

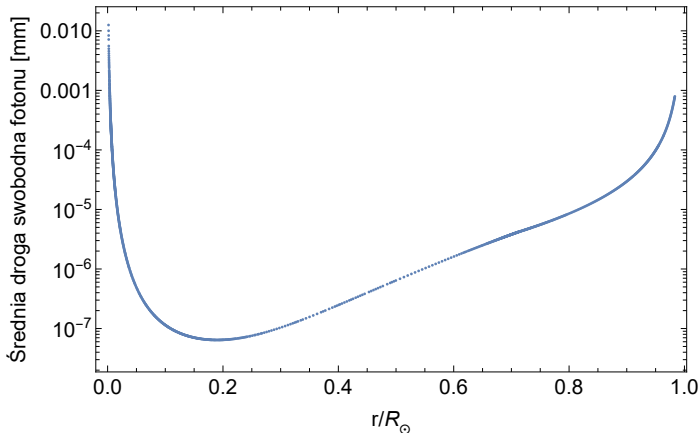
$$aT^4 = 3P_{\text{rad}} = 3\beta P$$

Po wstawieniu do równań:

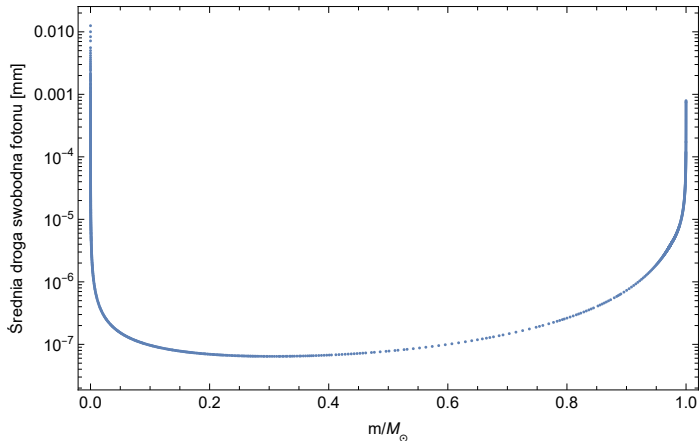
$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = -\frac{1}{3}L_{\gamma}c\frac{d(aT^4)}{dr} \end{cases}$$

dostajemy specjalną postać drogi swobodnej:

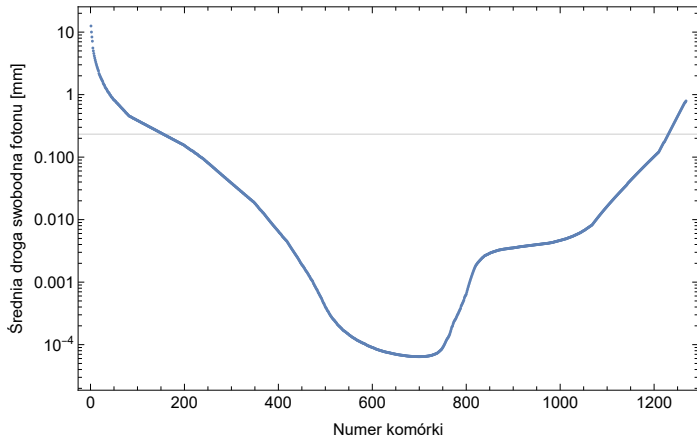
$$L_{\gamma} = \frac{L_{\odot}}{4\pi Gc\beta m\rho}$$



- 1 L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- 2 L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- 3 L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



- ① L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- ② L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- ③ L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



- ① L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- ② L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- ③ L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 +
streaming przez Microsoft Teams