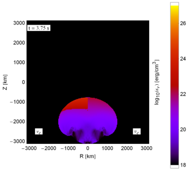
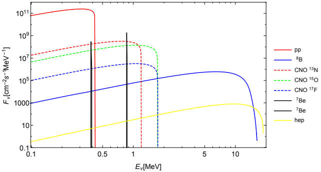
Podstawy astrofizyki i astronomii

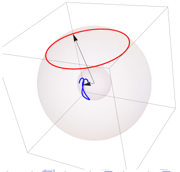
Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

12 marca 2023







Droga do modelu Słońca

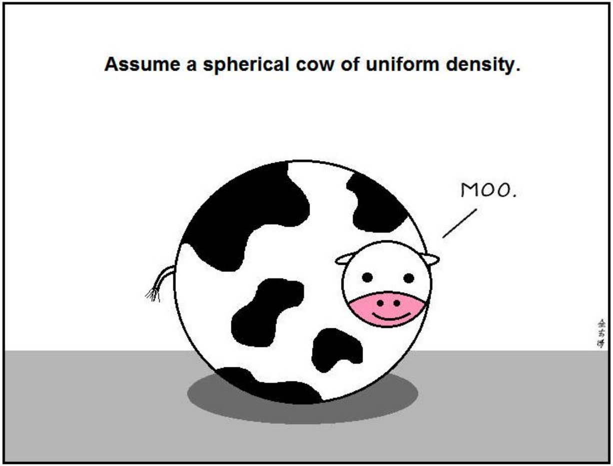
- celem kilku następnych wykładów i ćwiczeń jest stworzenie serii sensownych i coraz dokładniejszych modeli Słońca
- Słońce traktujemy jako prototypową gwiazdę
- Słońce jest sferycznie symetryczną, stabilną gwiazdą na ciągu głównym
  1. równowaga hydrostatyczna: w jaki sposób Słońce utrzymuje niemal statyczny rozkład gęstości i ciśnienia?
  2. równanie stanu (EOS): jaka jest zależność ciśnienia od gęstości, temperatury i składu chemicznego Słońca?
  3. równowaga termiczna: jaka jest zależność temperatury od odległości od centrum?
  4. źródło energii i ewolucja: skąd bierze się moc Słońca i jak zmienia się w czasie?

Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które nie zakładają symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!

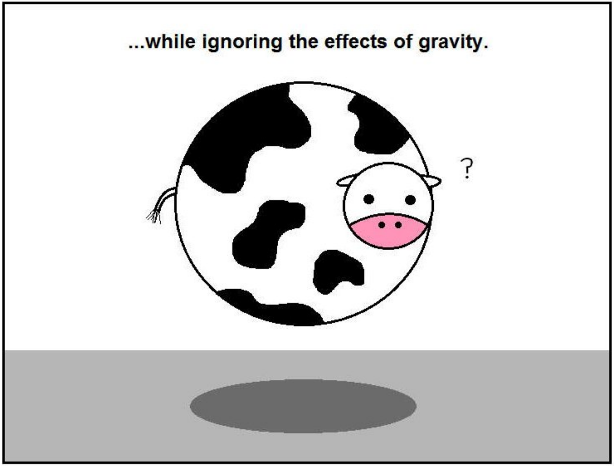
Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które nie zakładają symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



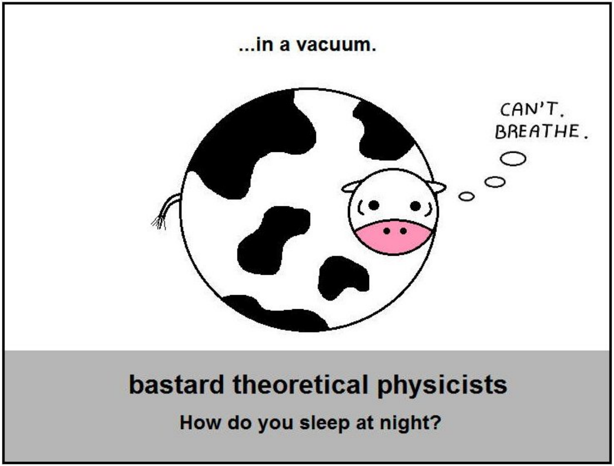
Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które nie zakładają symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które nie zakładają symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Lista obiektów sferycznie symetrycznych w astrofizyce

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii jest uzasadnione:

1. planety, planety karłowate, duże księżyce
2. większość gwiazd
3. gwiazdy neutronowe, białe karły, czarne dziury
4. gromady kuliste gwiazd
5. gromady galaktyk
6. Wszechświat

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii jest nieuzasadnione:

1. galaktyki spiralne
2. dyski akrecyjne
3. obiekty bardzo szybko rotujące
4. ciasne układy podwójne

Politropy

Politropowe równanie stanu

$$p = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

γ – wykładnik politropy, n – indeks politropy

- $n \to \infty$, $\gamma = 1$ – izotermiczne równanie stanu
- $n = 5$, $\gamma = \frac{6}{5}$ – wartość graniczna pomiędzy skończonymi a nieskończonymi rozwiązaniami (sfera Plummera)
- $n = 3$, $\gamma = \frac{4}{3}$ – model „Słońca", relatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 3/2$, $\gamma = \frac{5}{3}$ – nierelatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 1$, $\gamma = 2$ – gwiazda konwektywna
- $n \to 0$, $\gamma \to \infty$ – przypadek stałej gęstości

Politropowe równanie stanu: wzory

	γ – wykładnik politropy	n – indeks politropy
ciśnienie	$p = K\rho^{\gamma}$	$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$
„entalpia” właściwa $h = \frac{(H/V)}{\rho}$	$h = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma-1}$	$h = K(n+1)\rho^{1/n}$
„prędkość dźwięku” $c_s^2 = \partial p/\partial\rho$	$c_s^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$	$c_s^2 = K(1+\frac{1}{n})\rho^{1/n}$
	$c_s^2 = (\gamma-1)\,h$	$h = n\,c_s^2$
	$h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$	$h = (n+1)\frac{p}{\rho}$

Równanie równowagi dla entalpii

Wcześniej pokazaliśmy, że użycie „entalpii" właściwej $\nabla h = \nabla p/\rho$ upraszcza równania.

$$\frac{\nabla p}{\rho} \equiv \nabla h = -\nabla \Phi_g \tag{1a}$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \tag{1b}$$

Pierwsze równanie można scałkować:

$$h + \Phi_g = const \tag{2a}$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \tag{2b}$$

Działając obustronnie operatorem Laplace'a Δ na pierwsze z równań i korzystając z drugiego mamy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0$$

Równanie Lane-Emdena

Po wyprowadzeniu wzoru na entalpię gazu politropowego, otrzymujemy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0, \qquad h(\rho) = \frac{K\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} = \frac{K\gamma}{\gamma - 1}\rho^{1/n}$$

do ostatecznie daje jedno równanie różniczkowe:

$$\Delta h + 4\pi G \left(\frac{\gamma - 1}{K\gamma}\right)^n h^n = 0$$

Operator Laplace'a we współrzędnych sferycznych na postać:

$$\Delta h = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dh}{dr}\right) = \frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dh}{dr}$$

Standardową postać otrzymamy dokonując równoczesnej zamiany zmiennej radialnej r i funkcji niewiadomej h:

$$h(x) = h_c w(x), \quad r = \lambda x$$

Po przeprowadzeniu rachunków otrzymujemy słynne równanie Lane-Emdena:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0.$$

Funkcje Lane-Emdena

Równanie:

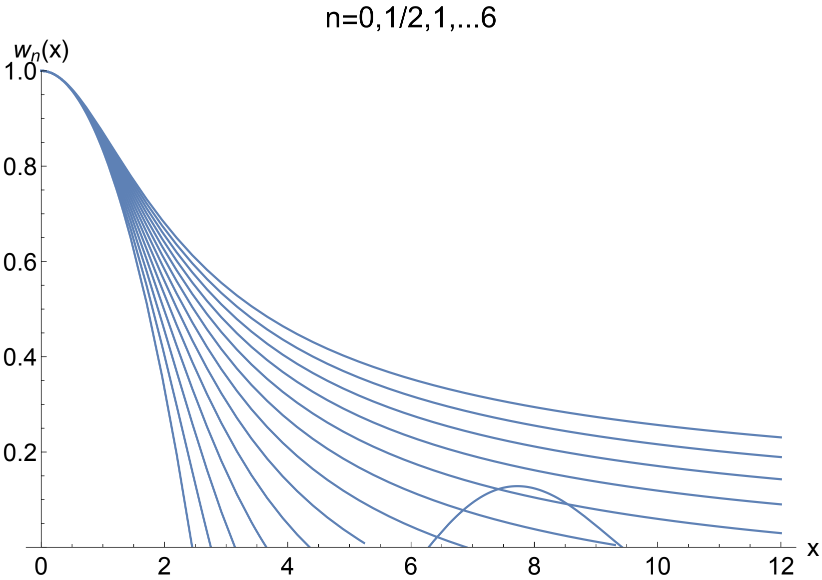
$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0$$

w warunkami początkowymi $w(0) = 1, w'(0) = 0$ definiuje rodzinę funkcji specjalnych $w_n(x)$.

Pewne wyobrażenie o przebiegu funkcji w_n dają trzy znane rozwiązania symboliczne:

- dla $n = 0$
$$w_0 = 1 - \frac{x^2}{6}$$
- dla $n = 1$
$$w_1 = \frac{\sin x}{x} = \operatorname{sinc} x$$
- dla $n = 5$
$$w_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$$

Funkcje Lane-Emdena: wykresy



Skalowanie do rozmiarów fizycznych

Rozwiązanie opisują wzory:

$$h(r) = h_C\, w_n(r/\lambda), \quad \rho(r) = \rho_C\, w_n(r/\lambda)^n$$

gdzie skalowanie opisuje kombinacja o wymiarze długości:

$$\lambda = c_s \sqrt{\frac{n}{4\pi G\rho_C}} = \sqrt{\frac{h_C}{4\pi G\rho_C}}$$

Wielkość $1/\sqrt{G\rho}$ ma wymiar czasu, natomiast c_s to prędkość „dźwięku", obie liczone dla wartości w centrum „gwiazdy". Strukturalnie wzór na λ wygląda identycznie jak wzór na długość Jeansa.

Masa i promień

Promień gwiazdy R opisuje przeskalowane pierwsze miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, natomiast masa gwiazdy M zależy od pochodnej funkcji w miejscu zerowym.

Oznaczmy:

x_0 – miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena,

$w_n'(x_0)$ – nachylenie funkcji w miejscu zerowym.

$$R = \lambda \, x_0$$

$$M = 4\pi\rho_C\lambda^3 \; \left(-x_0^2 w_n'(x_0)\right)$$

Przykłady struktury dla zadanego R i M

Jeżeli znamy masę M i promień R obiektu, oraz potrafimy obliczyć indeks n równania stanu materii z której jest zbudowany, to znamy strukturę wewnętrzną:

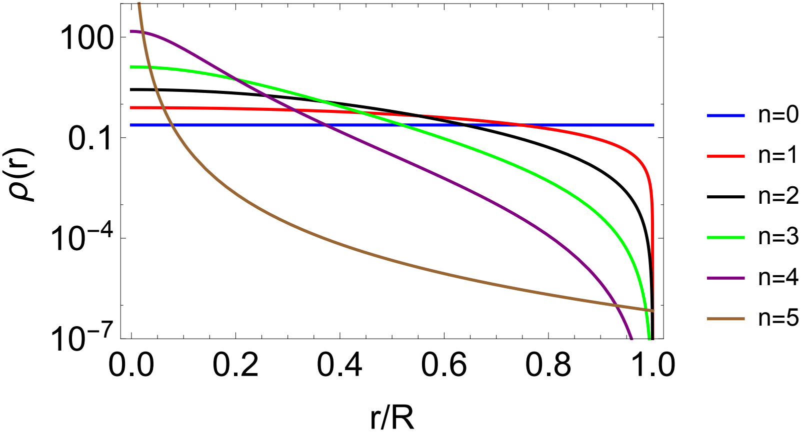
$$\rho(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \, w_n \left(\frac{r}{R} x_0\right)^n \left(-\frac{x_0}{3x_1}\right)$$

Wielkość:

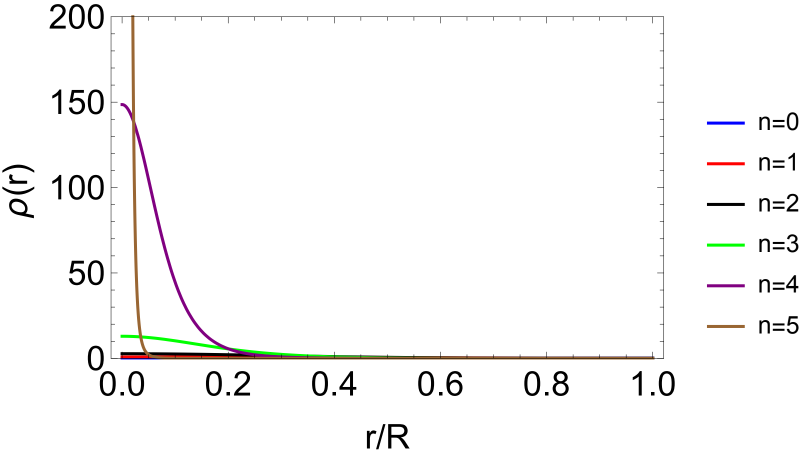
$$-\frac{x_0}{3x_1} = \frac{\rho_C}{\bar{\rho}}$$

gdzie: ρ_C – gęstość centralna (w środku), $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ – gęstość średnia, nazywamy kontrastem gęstości.

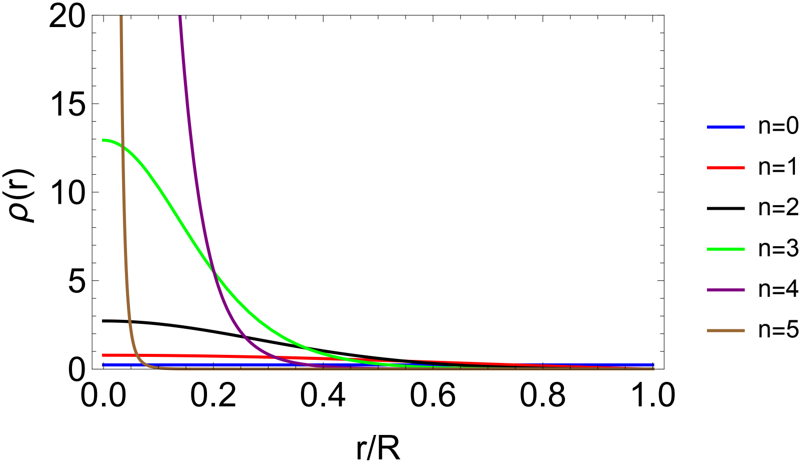
Przykłady struktury dla zadanego R i M



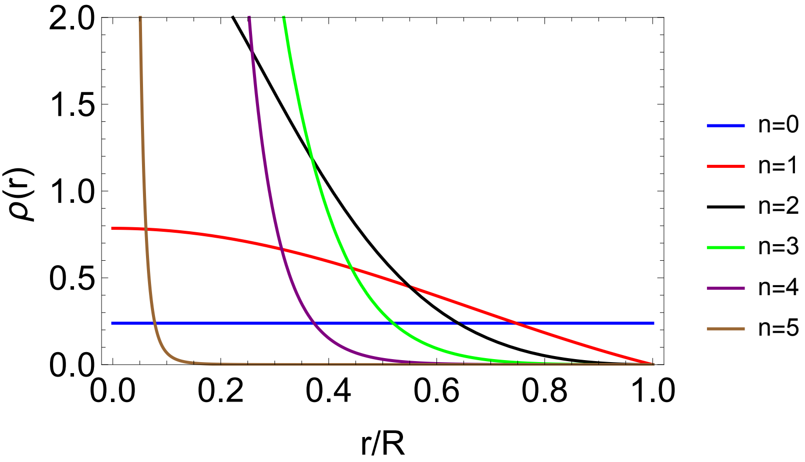
Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Politropy: zależność masa-promień

Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} M = 4\pi\lambda^3\rho_C \ \left(-x_0^2 w_n'(x_0)\right) \\ R = \lambda x_0 \\ \lambda^2 = \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} \\ h_C = K(n+1)\rho_C^{1/n} \end{cases} \tag{3}$$

Ostatnie równanie eliminuje h_C, z drugiego bierzemy λ. Zostają dwa równania łączące M, R i ρ_C. Po wyeliminowaniu gęstości centralnej ρ_C pozostaje skomplikowany wzór łączący promień R i masę M ciała:

$$R = \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{x_0}{w_n'(x_0)}\right)^{\frac{n-1}{n-3}} \left(\frac{4\pi G}{K(n+1)x_0^2}\right)^{n/(n-3)} \ M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

Politropy: zależność masa-promień

Pomijając czynniki zależne tylko od równania stanu, t.j. K i n, mamy:

$$R \propto M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

- dla $n < 1$ promień ciała R rośnie przy dokładaniu masy M
- dla $n = 1$ promień ciała R jest stały, niezależnie od masy M
- dla $1 < n < 3$ promień ciała maleje przy dokładaniu masy M
- dla $n = 3$ masa ciała $M = const$, i zależy wyłącznie od równania stanu (stałych fizycznych); w przypadku relatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego nazywamy ją masą Chandrasekhara $M_{Ch} \simeq m_{Planck}^3/m_{proton}^2 \simeq 1.5 M_\odot$
- dla $3 < n < 5$ promień znowu rośnie z masą
- dla $n \geqslant 5$ promień jest nieskończony

One-zone model

Dane jest równanie równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

Przybliżamy gradient ciśnienia:

$$\frac{dp}{dr} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta r} \sim \frac{p(R) - p(0)}{R - 0} = -\frac{p_C}{R}$$

i analogicznie prawą stronę:

$$-\frac{Gm\rho}{r^2} \sim -\frac{GM\rho_C}{R^2}$$

Dostajemy:

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

One-zone model vs polytropic model

W modelu politropowym:

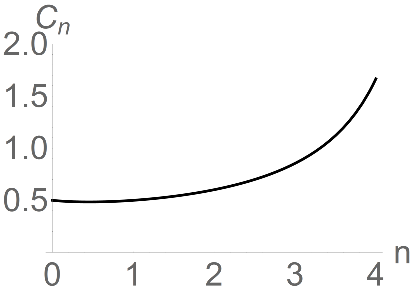
$$\frac{GM}{R} = \frac{G\frac{4}{3}\pi R^3\ \bar{\rho}}{R} = \frac{4\pi G\rho_C}{3}\left(-3\frac{w_n'(x_0)}{x_0}\right)\ \lambda^2 x_0^2 =$$

$$= -x_0 w_n'(x_0)\ 4\pi G\rho_C \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} = -x_0 w_n'(x_0)\ h_C =$$

$$= -x_0 w_n'(x_0)(n+1)\ \frac{p_C}{\rho_C}$$

One-zone	Politropa
$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$	$\frac{p_C}{\rho_C} = C_n \, \frac{GM}{R}$

$$C_n = -\frac{1}{x_0 w_n'(x_0)(n+1)}$$



Model Eddingtona

Eleganckim zastosowaniem struktury politropowej jest model do którego potrzebujemy:

1. równanie stanu (EOS) częściowo zjonizowanej mieszaniny H i He (gaz doskonały)
2. równanie stanu (EOS) gazu fotonowego (relatywistycznego)
3. rozwiązanie równania Lane-Emdena z $n = 3$


POWIETRZE
+
PARA WODNA
H/HE W GWIAZDACH
+
METALE
imgflip.com

Mieszanina H i He

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

1. skład „chemiczny” gazu
2. masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
3. stopień jonizacji/dysocjacji

1. 75% wodoru (H), 25 % helu (^{4}He)
2. $m_{\mathrm{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ^{1}H (0.02% ^{2}H), $m_{\mathrm{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ^{4}He (śladowe ilości ^{3}He).
3. dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{X_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{H}}} + \frac{X_{\mathrm{He}}}{A_{\mathrm{He}}}\right) = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4}\right) = \frac{13}{16}\frac{\rho k T}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do średniej wagi molekularnej x2, w postaci H_2 0.5.

Mieszanina H i He

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

1. skład „chemiczny” gazu
2. masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
3. stopień jonizacji/dysocjacji

1. 75% wodoru (H), 25 % helu (^{4}He)
2. $m_{\mathrm{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ^{1}H (0.02% ^{2}H), $m_{\mathrm{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ^{4}He (śladowe ilości ^{3}He).
3. dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{X_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{H}}} + \frac{X_{\mathrm{He}}}{A_{\mathrm{He}}}\right) = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4}\right) = \frac{13}{16}\frac{\rho k T}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do średniej wagi molekularnej x2, w postaci H_2 0.5.

Mieszanina H i He

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

1. skład „chemiczny” gazu
2. masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
3. stopień jonizacji/dysocjacji

1. 75% wodoru (H), 25 % helu (^{4}He)
2. $m_{\mathrm{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ^{1}H (0.02% ^{2}H), $m_{\mathrm{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ^{4}He (śladowe ilości ^{3}He).
3. dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{X_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{H}}} + \frac{X_{\mathrm{He}}}{A_{\mathrm{He}}}\right) = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4}\right) = \frac{13}{16}\frac{\rho k T}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do średniej wagi molekularnej x2, w postaci H_2 0.5.

Mieszanina fotonów i gazu doskonałego: Standardowy model Eddingtona

Zakładamy, że stosunek ciśnienia gazu fotonowego P_{rad} do ciśnienia gazu doskonałego P_{gaz} jest stały:

$$\frac{P_{\mathrm{rad}}}{P_{\mathrm{gaz}}} = \frac{\beta}{1-\beta} = const$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \\ P_{\mathrm{gaz}} = \frac{k}{m} \rho T \\ \frac{P_{\mathrm{rad}}}{P} = \beta \\ P_{\mathrm{rad}} + P_{\mathrm{gaz}} = P \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $P, P_{\mathrm{rad}}, P_{\mathrm{gaz}}, T$. Po wyeliminowaniu temperatury otrzymujemy równanie stanu w postaci barotropowej, t.j. zawierającej wyłącznie ciśnienie P, gęstość ρ i stałe fizyczne lub „materiałowe”:

$$P = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{a}} \left(\frac{k\rho}{(1-\beta)m} \right)^{4/3} = K\rho^{4/3} = K\rho^{1+\frac{1}{3}}, \quad \gamma = \frac{4}{3}, n = 3$$

- standardowy model Eddingtona to model politropowy z $n = 3$
- masa gwiazdy jest masą Chandrasekhara, zależną wyłącznie od β i stałych fizycznych
- związek pomiędzy β a masą gwiazdy jest algebraicznym równaniem 4 stopnia:

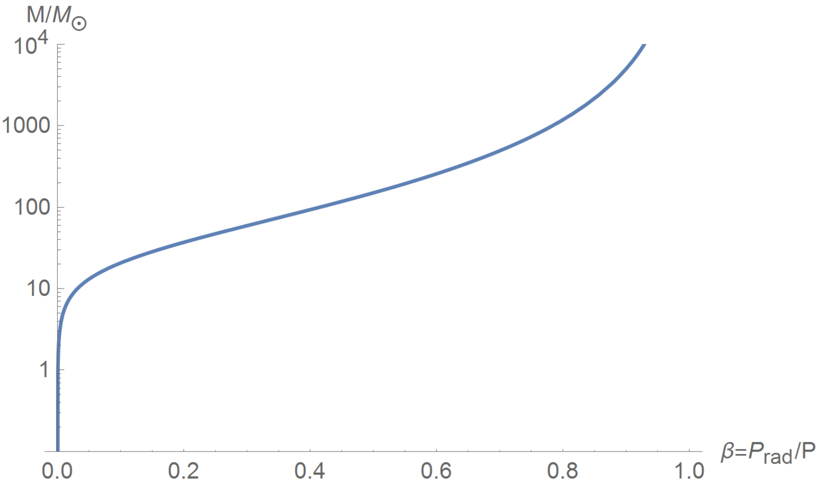
$$M^2 = \frac{48 k^4}{\pi a G^3 \mu^4 m^4} \frac{\beta}{(1-\beta)^4} \left(-x_0^2 w_3'(x_0)\right)^2$$

gdzie $w_3(x_0) = 0$, czyli $x_0 \simeq 6.9$ to miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena w_3, a nachylenie w miejscu zerowym to $w_3'(x_0) \simeq -0.04$

- po wstawieniu wartości $\mu = 16/27$ dla zjonizowaj materii po Wielkim Wybuchu i $\beta = 0.5$

$$M \simeq 150 \mathrm{M}_{\odot}.$$

Masa gwiazdy III populacji w modelu Eddingtona



Zrozumieć gwiazdy

Astrofizyczny opis gwiazdy składa się z czterech skladników:

1. struktura hydrostatyczna (równowaga gradientu ciśnienia i grawitacji):
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2},$$
2. zachowanie masy/związek rozkładu masy z grawitacją:
$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$
3. transport energii/pomieniowania (gwiazdy świecą!),
4. produkcja/źródło energii (reakcje termojądrowe).

Docelowo potrzebujemy 4 równań, których rozwiązanie wyznaczy pełną strukturę gwiazdy: ciśnienie $P(r)$, gęstość $\rho(r)$, temperaturę $T(r)$, strumień energii $L(r)$i skład chemiczny/izotopowy $X_i(r)$. Warunki brzegowe wyznaczają masa całkowita $M(R)$, promień R, temperatura powierzchniowa $T(R)$ oraz jasność gwiazdy $L(R)$. Początkowy skład chemiczny wynika z nukleosyntezy kosmologicznej (Wielkiego Wybuchu).

Chcesz wiedzieć więcej?

Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 + streaming przez Microsoft Teams