

## Zestaw zadań 8

1. Dane są relacje:

- (a)  $x, y \in \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}$
- (b)  $x, y \in \mathbb{R} : x - y < 0$
- (c) W relacji są dwa słowa, z których drugie jest anagramem pierwszego.
- (d) W relacji są dwa słowa, z których drugie powstaje przez przesunięcie cykliczne pierwszego o jeden znak w prawo. Przykład pary w relacji: (abcd,dabc).

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| (e) |   | a | b | c | d |
|     | a | x |   |   |   |
|     | b | x |   |   |   |
|     | c |   |   |   | x |
|     | d |   |   | x |   |

Które z tych relacji są:

- (i) zwrotne.
  - (ii) symetryczne/antysymetryczne.
  - (iii) przechodnie
  - (iv) relacjami równoważności.
  - (v) funkcjami
2. Narysuj graf o siedmiu wierzchołkach (a,b,c,d,e,f,g) oraz 8 skierowanych krawędziach:  $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow e, e \rightarrow b, b \rightarrow f, e \rightarrow f, f \rightarrow a$ . Odpowiedz na pytania:
- (a) Ile istnieje acyklicznych dróg z wierzchołka (a) do (d). Jaką mają postać?
  - (b) Jakie są poprzedniki wierzchołka (b)
  - (c) Ile istnieje cykli prostych?
  - (d) Wymień cykle nie proste o długości nie większej niż 7.
3. Weźmy wierzchołki (a, b, c, f) z grafu z zad. 2 oraz krawędzie pomiędzy nimi i potraktujmy ten podgraf jako relację binarną. Uzupełnij ją tak, aby była:
- (a) zwrotna
  - (b) symetryczna
  - (c) przechodnia
4. Potraktujmy graf z zad. 2 przez zastąpienie każdej krawędzi skierowanej  $u \rightarrow v$  krawędzią nieskierowaną  $u - v$
- (a) Znajdź wszystkie drogi z wierzchołka a do d, które nie zawierają powtórnego wystąpienia żadnego wierzchołka
  - (b) Ile istnieje cykli prostych które zawierają wszystkie sześć wierzchołków?
  - (c) Jakich sąsiadów ma wierzchołek (a)
5. Przedstaw graf z poprzedniego przykładu za pomocą: (a) listy sąsiedztwa, (b) macierzy sąsiedztwa.
6. Udowodnij, że istnienie drogi między wierzchołkami w grafie nieskierowanym jest relacją równoważności.
7. Podaj liczbę chromatyczną grafu z zadania 2.