6. Szacowanie masy.

6.1. Uwagi ogólne

Punktem odniesienia dla wielkoskalowej gęstości masy ρ w kosmosie jest gęstość krytyczna ρ_c,

$$\rho = h^2 \times \rho_c \equiv h^2 \times \frac{3H^2}{8\pi} = h^2 \times 0.9 \times 10^{-29} \frac{g}{cm^3},$$

gdzie $h \equiv H_0/100$ km/(s Mpc). Gęstość krytyczna ρ_c odpowiada obecności jednego atomu wodoru w 100 litrach objętości.

Modele astrofizyczne pozwalają, w oparciu o pewne mierzalne wielkości (absolutna wielkość gwiazdowa, zawartość metali itp.), wyznaczyć masy gwiazd (np. str. 208 w [40]). Oczywistą metodą wyznaczania masy galaktyk czy gromad galaktyk jest po prostu "liczenie" świecących lub promieniujących źródeł ; otrzymuje się w ten sposób dane o 2-3 rzędy wielkości odbiegające od otrzymanych innymi metodami. Materii świecącej jest mniej niż 1% ρ_c, a obserwacje nie mogą ujawnić więcej niż niewielki ułamek całkowitej ilości świecącej materii (różne efekty, np. pochłanianie przez gaz i przesłanianie redukują promieniowanie).

Poniżej zostaną przedstawione techniki wyznaczania mas galaktyk i gromad galaktyk wykorzystujące:

i) metody soczewkowania grawitacyjnego;

ii) twierdzenia o wiriale; metody równowagi hydrodynamicznej;

iii) relacje empiryczne typu Tully - Fishera.

W metodach i) oraz ii) wykorzystuje się informacje o masie widzianej i argumenty dynamiczne, przy założeniu stanu równowagowego, do wyciągnięcia wniosków o ilości ciemnej materii. Zupełnie kluczowym jest warunek równowagi hydrodynamicznej (stacjonarność). Niespełnienie tego założenia radykalnie zmieniłoby konkluzje. Metody soczewkowania dostarczają oszacowań, które są prawdopodobnie mniej wrażliwe na łamanie (w jakimś ograniczonym stopniu) założeń równowagi hydrodynamicznej.

6.2. Metody wyznaczania mas oparte na efektach soczewkowania grawitacyjnego.

6.2.1. Wyprowadzenie równania "soczewki grawitacyjnej". **i) Metryka.** Założymy, że metryka czasoprzestrzeni jest małym zaburzeniem metryki Minkowskiego, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(1-(h/2))+h_{\mu\nu}$, gdzie $h \equiv h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$. W tzw. cechowaniu harmonicznym (w przybliżeniu liniowym sprowadza się ono do $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$) równania Einsteina przybierają postać

$$(\Delta - \partial_t^2)h^{\mu\nu} = 16\pi T^{\mu\nu}. \tag{80}$$

Jeśli źródło pola grawitacyjnego jest izolowane, to można napisać rozwiązania typu Lenarda-Wiecherta. Rozwiązanie opóźnione ma postać

$$h^{\mu\nu}(t,\vec{x}) = -4\int_V \frac{T^{\mu\nu}(t-|\vec{y}|, \vec{x}+\vec{y})}{|y|}d^3y. \tag{81}$$

Przy dalszych założeniach dotyczących materii – ciecz doskonała, ciśnienie zaniedbywalne w porównaniu z gęstością masy, ruchy swoiste materii powolne ($|\vec{v}| << 1$) – tensor napięć T_{ik} można zaniedbać. Wiodący wkład do metryki dają gęstość masy $\rho \approx T^{00}$ i gęstość pędu $T^{0i} = \rho v^i$. Metryka ma postać

$$ds^2 \equiv -(1+2U)dt^2 + 8dt\vec{V}_i d\vec{x}^i + (1-2U)d\vec{x}^2, \tag{82}$$

gdzie U i $\vec{V}$ są zadane przez (81) ($\mu,\nu = 0$ i $\mu = 0, \nu = 1,2,3$, odpowiednio). Przyjmując założenie "bliskiej strefy" (rozmiar soczewki znacznie mniejszy od odległości obserwatora od soczewki) – $|\vec{y}| << t|$ i założenie powolnych ruchów — można wyrazić U w sposób następujący

$$U(t,\vec{x}) = -\int_V \frac{\rho(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{|\vec{y}|}d^3y. \tag{83}$$

Można pominąć wektor "shiftu" w (82) i metryka przybiera postać

$$ds^2 = -(1+2U)dt^2 + (1-2U)dx^i dx_i; \tag{84}$$

jest ona poprawna sla słabego pola grawitacyjnego. Pominięcie potencjału wektorowy $\vec{V}$ jest usprawiedliwione w klasie potencjałów spełniających warunek $|\vec{U}| << 1$ [41].

ii) Równanie promieni świetlnych.

Wygodnie jest uważać promienie świetlne za trajektorie cząstek o zerowej masie i wektorze falowym $p^\mu = \frac{dx^\mu}{dv}$ (proporcjonalnym do 4-pędu). Swobodny ruch bezmasowej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym jest zadany równaniem $p^\beta\nabla_\beta p^\alpha = 0$, które można też zapisać (biorąc pod uwagę $p^\beta\partial_\beta = \frac{d}{dv}$) jako

$$\frac{Dp^\alpha}{dv} \equiv \frac{dp^\alpha}{dv} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}p^\nu p^\mu = 0. \tag{85}$$

v jest parametrem afinicznym; forma równania (85) jest zachowana wtedy i tylko wtedy gdy reparametryzacja $v \to \tilde{v}$ jest przekształceniem afinicznym, $\tilde{v} = av + b$. Zdefiniuję parametr afiniczny v wzdłuż trajektorii następująco

$$\frac{dt}{dv} \equiv p^0. \tag{86}$$

Symbole Christoffela można zapisać jak poniżej,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \approx -\delta_{\alpha\gamma}\partial_\beta U - \delta_{\alpha\beta}\partial_\gamma U + \partial_\alpha U\delta_{\beta\gamma}, \tag{87}$$

gdzie $\delta_{\alpha\beta}$ jest symbolem Kroneckera. Zaniedbano tu człony nieliniowe w U oraz pochodne czasowe z U, wykorzystując założenia słabego pola i powolnej zmienności źródeł pola.

Równanie na składową zerową

$$
\begin{aligned}
0 &\approx p^0\frac{dp^0}{dt} - 2g^{00}p^0p^k\partial_k U \approx p^0\frac{dp^0}{dt} + 2p^0p^k\partial_k U \\
&\approx p^0\Big(\frac{dp^0}{dt} + 2p^0\frac{dU}{dt}\Big)
\end{aligned}
\tag{88}
$$

(wykorzystano tu $\frac{dU}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt}\partial_\mu U = \frac{p^\mu}{p^0}\partial_\mu U$ oraz $\partial_0 U \approx 0$) można przekształcić do postaci

$$
\frac{d}{dt}\Big(p^0(1+2U)\Big) = 0. \tag{89}
$$

Wielkość $p^0(1+2U)$ jest całką ruchu wzdłuż trajektorii promienia świetlnego. Jest to zresztą całka ruchu, którą można wyprowadzić natychmiast z faktu istnienia czasowego wektora Killinga $\eta_{(0)}$ dla metryki (84); $\eta^\mu_{(0)}p_\mu$ jest wielkością zachowaną.

Zdefiniuję dalej

$$
v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{p^\mu}{p^0}. \tag{90}
$$

$\frac{dx^i}{dt}$ jest wektorem stycznym, o jednostkowej długości, do promienia świetlnego. Przestrzenna część równań (85) da się zapisać jak poniżej:

$$
p^0\frac{dp^i}{dt} + 2(p^0)^2\partial_i U - 2p^ip^k\partial_k U \approx 0. \tag{91}
$$

Dzieląc obustronnie przez $(p^0)^2(1+2U)$ i wprowadzając v^i, otrzymuję

$$
\frac{d}{dt}((1-2U)v^i) \approx -2\partial_i U + 2v^iv^k\partial_k U; \tag{92}
$$

jeśli zdefiniować składowe trójwektora $\vec{e}$, $e^i \equiv v^i(1-2U)$, to (92) przybiera postać

$$
\frac{d\vec{e}}{dt} = -2\nabla_T U. \tag{93}
$$

Symbol ∇_T oznacza $\nabla U - \vec{e}\vec{e}\cdot\nabla U$, gradient w kierunku poprzecznym do trajektorii. (Porównaj (92) z równaniem (4.13) w [41].)

W czasoprzestrzeni płaskiej mielibyśmy $\frac{dx^i}{dt} = c^i =$ stały wektor. Równanie (93) określa prędkość zmiany kierunku wektora stycznego do trajektorii. Załóżmy, że :

i) kąt odchylenia spowodowany przez pole grawitacyjne jest mały;

ii) obszar, w którym ogniskowanie grawitacyjne ma miejsce jest mały w porównaniu z odległością soczewki do źródła i obserwatora.

Wówczas mamy $\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{dx^i}{dt}\partial_i \approx \partial_t + c^i\partial_i$. Całkowanie (93) wzdłuż niezaburzonego kierunku c^i dobrze przybliża kąt określający zmianę kierunku promienia.

Powyższa procedura prowadzi do dowodu poniższego wyniku.

Twierdzenie. W przypadku zlokalizowanych w małej objętości i prawie statycznych, słabych pól grawitacyjnych, ugięcie promienia światła przechodzącego w odległości ζ od centrum osiowo symetrycznego pola grawitacyjnego jest dane wzorem

$$
\alpha = -2\int_{-\infty}^{\infty} dz\partial_n U(z, D), \tag{94}
$$

gdzie $\partial_n U \equiv \nabla_T U$ i $D = \sqrt{\zeta^2 + z^2}$. ζ jest odległością soczewki od promienia świetlnego.

Podobną dyskusję - wyznaczenie odchylenia trajektorii cząstki poruszającej się z prędkością światła w słabym polu grawitacyjnym - można by oczywiście przeprowadzić w ramach mechaniki Newtonowskiej, traktując światło jako zbiór korpuskuł. Otrzymany wynik jest dwukrotnie mniejszy niż powyżej a otrzymał go po raz pierwszy niemiecki fizyk i astronom Soldner w początkach XIX wieku.

Dwa przypadki szczególne.

i) (soczewka punktowa lub prawie punktowa).

Niech $\vec{\zeta}$ oznacza wektor ortogonalny do $\vec{c}$ o długości ζ i niech l oznacza odległość mierzona wzdłuż prostej wzyznaczonej przez $\vec{c}$ ($l = 0$ odpowiada minimalnej odległości od centrum soczewki): $\vec{x} \equiv \vec{\zeta} + l\vec{c}$. W przypadku izotropowej kuli materii o promieniu nie większym od ζ mamy $U = M(\zeta)/(\zeta^2 + l^2)^{1/2}$ i $\partial_n \phi = -\vec{\zeta} M(\vec{\zeta})/(\zeta^2 + l^2)^{3/2}$. Zatem z (94) otrzymujemy odchylenie kierunku promienia świetlnego

$$\vec{\alpha} = 2\frac{\vec{\zeta}}{\zeta} M(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\zeta^2 + x^2)^{3/2}} dx = 4\vec{\zeta}\frac{M(\zeta)}{\zeta^2}. \tag{95}$$

Wykorzystuje się tutaj całkę

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{(D^2 + x^2)^{1/2}(C^2 + x^2)} = \frac{1}{C\sqrt{D^2 - C^2}} \arctan\Big(\frac{\sqrt{D^2 - C^2}}{C}\Big) \tag{96}$$

(całka 2.2.6.24 na stronie 300 w Prudnikov et al. [42]; należy dokonać przejścia granicznego $C \to D \equiv \zeta$).

ii) (soczewka o małym rozmiarze podłużnym – przybliżenie cienkiej soczewki.) Załóżmy, że rozmiar podłużny soczewki jest tak mały, że nie tylko kąt ugięcia ζ jest mały, ale także przesunięcie Δ_s toru promieni świetlnych jest małe, $\Delta_s |\nabla_T^2 U| << |\nabla_T U|$ [41]. W takim przypadku element masy $dM \equiv \Sigma(\vec{\zeta}) d^2\zeta$ soczewki odchyla bieg promienia o kąt $d\alpha(\zeta)$ zadany wzorem (95). Całkowanie po dwuwymiarowej płaszczyźnie wyznaczonej przez $\vec{\zeta}$ da całkowitą zmianę kąta pochodzącą od "cienkiej soczewki":

$$\vec{\alpha}(\vec{\zeta}) = 4 \int_{R^2} d^2\zeta' (\vec{\zeta} - \zeta') \frac{\Sigma(\vec{\zeta'})}{(\vec{\zeta} - \vec{\zeta'})^2} \tag{97}$$

Wzór (97) jest podstawowym wzorem w teorii soczewek grawitacyjnych.

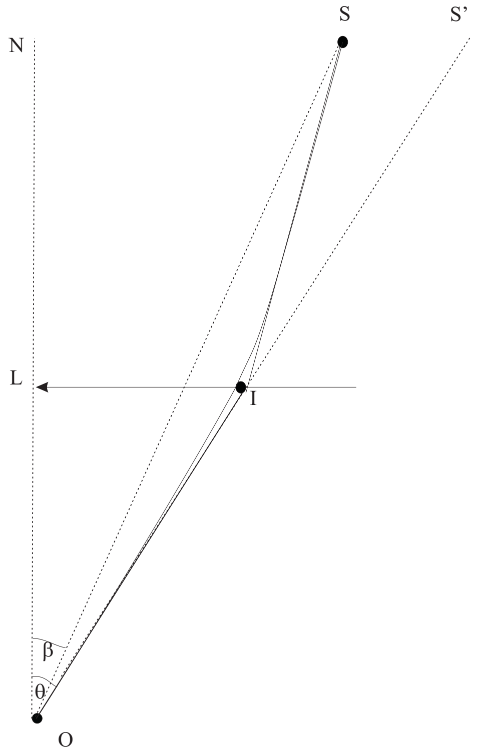
6.2.2. Równanie soczewki Łatwo wyprowadzić, posiłkując się rysunkiem 4 (patrz poniżej), związek nazywany równaniem soczewki

$$\beta = \theta - \alpha(\vec{\zeta}) \frac{D_{ds}}{D_s}. \tag{98}$$

Wzór ten dotyczy w zasadzie wyłącznie osiowo symetrycznych soczewek, jest on jednak dobrym przybliżeniem - biorąc pod uwagę przyjęte założenia o małości kąta odchylenia - także dla niesymetrycznych soczewek. Dla tych ostatnich można łatwo wyprowadzić, zakładając geometrię Euklidesa,

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\zeta}) \frac{D_{ds}}{D_s}. \tag{99}$$

Równanie soczewki w modelach kosmologicznych ma również postać (98), jednakże odległości pojawiające się powyżej są dystansami kątowymi. Odległość kątowa r_A wiąże się z jasnościową D następującym wzorem: $r_A = D/(1 + z)^2$. Dla $z << 1$ pokrywają się one z odległościami jasnościowymi.



Oznaczenia:

O - obserwator, L -- soczewka (lens) , S - źródło (source)
β - kąt widzenia niezaburzonego źródła; θ-kąt widzenia obrazu.
Powyżej zakłada się, że kąty są małe a sfery niebieskie przechodzące
przez N i L zastąpiono płaszczyznami.

$OL=D_d$. $LN=D_{ds}$. $ON= D_s$. $LI=\zeta$.

Figure 6.

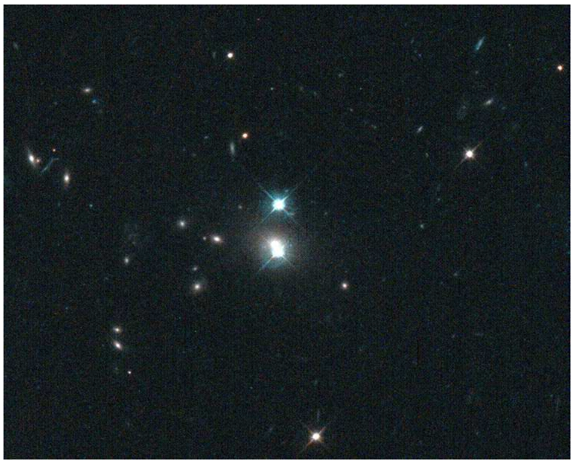


Figure 7. Pierwszy potwierdzony przypadek soczewkowania kwazarów, tzw. podwójny kwazar 0957+561, zinterpretowany we właściwy sposób przez Walsh'a, Carswell'a i Weymann'a (*Nature* **279**, 381(1979). Soczewkowanie odkryto w części radiowej widma fal elektromagnetycznych, obrazy są oddalone o około 6". Soczewkę odkryto także w roku 1979. Obraz pochodzi z kolekcji Billa Keela, http://www.astr.ua.edu/keel/agn/q0957.html.

6.2.3. Soczewka punktowa. Obrazy. Dla zwartej ogniskującej masy kąt odchylenia promienia świetlnego jest zadany wzorem (95); przechodząc do wielkości skalarnych mamy

$$\alpha = 4\frac{M}{\zeta}. \tag{100}$$

Podstawienie $\theta = \zeta/D_d$ i (100) do (98) prowadzi do równania kwadratowego

$$-\zeta^2 + D_d\beta\zeta + 4M\frac{D_{ds}D_d}{D_s} = 0 \tag{101}$$

lub

$$-\theta^2 + \beta\theta + 4M\frac{D_{ds}}{D_sD_d} = 0. \tag{102}$$

Równanie (101) posiada 2 rozwiązania (istnieją zatem 2 obrazy),

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(\beta^{+}_{-}\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2}\Big); \tag{103}$$

powyżej $\alpha_0 \equiv 2\sqrt{M\frac{D_{ds}}{D_sD_d}}$. α_0 jest wielkością charakterystyczną (tzw. kątem Einsteina) dla soczewki. Iloczyn $\alpha_0 D_d \equiv R_E$, nazywa się promieniem Einsteina. Odnotujmy relację jaką spełnia dystans kątowy 2 obrazów $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_2 \geq 2\alpha_0$.

Istnienie wielokrotnych rozwiązań równania soczewki jest cechą typową dla rozkładów gęstości powierzchniowej przewyższających tzw. gęstość krytyczną $\Sigma_c \equiv M/(\pi R_E^2) = D_s/(4\pi D_d D_{ds})$. Jest to zresztą fakt ważny dla zastosowań astrofizycznych, o czym będzie mowa dalej.

6.2.4. Współczynnik wzmocnienia Współczynnikiem wzmocnienia jest stosunek strumienia jasności obrazu do strumienia jasności źródła. Strumień jest iloczynem jasności powierzchniowej (takiej samej dla źródła i obrazu) źródła przez kąt bryłowy. Można stąd wyprowadzić wzór na wzmocnienie μ

$$\mu = |\det(\partial_{\vec{\theta}}\vec{\beta})|^{-1}. \tag{104}$$

Jest jasne, że wzmocnienie zależy od masy soczewki. Dla soczewki punktowej (patrz przykład w poprzedzającym paragrafie) otrzymuje się stosunek wzmocnień dwu obrazów źródła

$$\frac{\mu_+}{\mu_-} = \frac{\sin\theta_1 d\theta_1}{\sin\theta_2 d\theta_2} = \left[\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4}+\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4}-\tilde{\beta}}\right]^2. \tag{105}$$

We wzorze tym $\tilde{\beta}$ jest znormalizowanym kątem β, $\tilde{\beta} = \beta/\alpha_0$.

Znajomość stosunku wzmocnień μ_+/μ_- oraz dystansu kątowego $\Delta\theta$ pozwala wyznaczyć masę M soczewki punktowej. Podobne relacje otrzymuje się także dla niepunktowych soczewek.

Ćwiczenie 6.1

ii) Izotermiczna przezroczysta kula gazu.

Pokazać, że odchylenie promienia świetlnego przechodzącego przez izotermiczną stacjonarną kulę gazu o równaniu stanu $p = \sigma^2\rho$ jest dane wzorem

$$\alpha = 4\pi\sigma^2. \tag{106}$$

Wskazówka. Sprawdzić, że równanie Lane-Emdena dla izotermicznej stacjonarnej kuli gazu posiada rozwiązanie postaci $\rho = \sigma^2/(2\pi r^2)$ i potencjał grawitacyjny $U = 2\sigma^2 \ln r$.

Wzór (106) stosuje się do odchylenia promieni świetlnych przechodzących przez galaktyki spiralne, dla których rozkład gęstości jest nieźle przybliżony przez K/r^2. W takim przypadku σ jest z grubsza równy prędkości rotacji gwiazd. (Układ ciał oddziaływujących siłami newtonowskimi można traktować w pewnym przybliżeniu jako gaz izotermiczny. Patrz dyskusja dalej.)

6.2.5. Potencjał ugięcia Definiuje się bezwymiarowe wielkości $\vec{\theta} \equiv \vec{\zeta}/D_d$ i $\kappa(\vec{x}) \equiv \Sigma(\vec{\zeta})/\Sigma_{cr}$, gdzie $\Sigma_{cr} \equiv D_s/(4\pi D_d D_{ds}$. ζ_0 jest pewną charakterystyczną wielkością, np. promieniem Einsteina dla soczewki punktowej. Przy pomocy tych wielkości można napisać kąt ugięcia (97) jak niżej

$$\vec{\alpha}(D_d\theta_0) = \frac{D_s}{D_{ds}}\nabla_{\vec{\theta}}\psi(\vec{\theta}). \tag{107}$$

Wielkość

$$\psi(\vec{\theta}) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{R^2} d^2\theta'\kappa(\vec{\theta}')\ln|\vec{\theta}-\theta'| \tag{108}$$

nazywa się potencjałem ugięcia (deflection potential).

Równanie soczewki (99) przybiera teraz postać

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \nabla_{\vec{\theta}}\psi(\vec{\theta}). \tag{109}$$

Jeśli gęstość powierzchniowa soczewki grawitacyjnej przewyższa w pewnym punkcie wartość krytyczną Σ_{cr}, to muszą istnieć obrazy wielokrotne (patrz str. 177 w [41]).

6.2.6. Współczynnik wzmocnienia i ścinanie. Macierz wzmocnienia

$$A = (\partial_{\vec{\theta}} \vec{\beta}) \tag{110}$$

jest symetryczną macierzą drugiego rzędu,

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \psi; \tag{111}$$

mamy tu $\partial_i \equiv \partial_{\theta^i}$ - składowe operatora dwuwymiarowego gradientu ∇. Jej wartości własne λ_1, λ_2 są rzeczywiste. Ich suma jest równa $2 - \Delta^2\psi = 2(1-\kappa)$ (łatwo widać, że $\Delta^2\psi \equiv \nabla \cdot \nabla\psi = 2\kappa$). Kwadrat ich różnicy jest dany wzorem $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (\partial_1^2\psi - \partial_2^2\psi)^2/4 + (\partial_1\partial_2\psi)^2$. Wyznacznik macierzy A jest równy $(1-\kappa)^2 - \left((\partial_1^2\psi - \partial_2^2\psi)^2/4 + (\partial_1\partial_2\psi)^2\right)$ a wzmocnienie

$$\mu = \frac{1}{|(1-\kappa)^2 - \left(\frac{1}{4}(\partial_1^2\psi - \partial_2^2\psi)^2 + (\partial_1\partial_2\psi)^2\right)|}. \tag{112}$$

Wyraz $(1-\kappa)$ zawierający znormalizowaną gęstość powierzchniową κ nazywa się zbieżnością.n Składnik mianownika (112),

$$\gamma \equiv \frac{1}{4}(\partial_1^2\psi - \partial_2^2\psi)^2 + (\partial_1\partial_2\psi)r, \tag{113}$$

nazywa się ścinaniem.

Nazwy powyższe nie są przypadkowe. W początkach lat sześćdziesiątych dwudziestego stulecia zbadano (Sachs, Ehlers i inni) zmiany przekroju poprzecznego wiązki promieni świetlnych. Okazuje się, że niezerowa masa powoduje zmniejszanie przekroju w porównaniu do tego, jaki byłby przy przechodzeniu wiązki w pustej przestrzeni. (Podobny wpływ ma zresztą ścinanie, można jednak wybrać sytuacje, gdy wpływ ścinania jest zerowy lub zaniedbywalny.) Z kolei ścinanie zmienia kształt przekroju wiązki - rozciąga lub ściska, w dwu ortogonalnych kierunkach odpowiadającym wartościom własnym λ_1 i λ_2.

6.2.7. Soczewkowanie na izotermicznej kuli gazu. (Porównaj z ćwiczeniem 6.1. Uzyskamy poniżej wynik opisujący odchylenie promieni świetlnych przechodzących przez galaktyki spiralne.)

Można pokazać, korzystając z równań Lane-Emdena (patrz jeden z następnych rozdziałów), że gęstość nieskończonej izotermicznej kuli gazu jest proporcjonalna do $1/r^2$. Przyjmiemy rozkład gęstości $\rho = \sigma^2/(2\pi r^2)$ dla izotermicznej kuli gazu o skończonym promieniu $\tilde{\theta} D_d$. (Zauważmy, że rozkład gęstości galaktyk spiralnych w pewnym obszarze może być przybliżony właśnie przez $\sigma^2/(2\pi r^2)$, gdzie σ^2 jest wielkością związaną z dyspersją prędkości liczoną z poszerzenia dopplerowskiego spektrum promieniowania). Gęstość zrzutowana na płaszczyznę soczewki jest (w przybliżeniu) proporcjonalna do $1/(D_d\theta) = 1/\zeta$; dokładniej,

$$\Sigma = \frac{\sigma^2}{2\zeta} \equiv \frac{\theta_E}{2\zeta} \frac{D_s}{8\pi D_{ds}}, \tag{114}$$

$\theta_E \equiv 4\pi\sigma^2 D_{ds}/D_s$ nazywa się kątem ugięcia Einsteina. Znormalizowana gęstość jest dana wzorem

$$\kappa = \frac{\theta_E}{2\theta}. \tag{115}$$

Potencjał ugięcia ψ można policzyć z (108), otrzymując dla $\theta \geq \tilde{\theta}$

$$\psi(x) = \theta_E \tilde{\theta} \ln(\theta). \tag{116}$$

Wykorzystuje się tu całkę

$$\int_0^{\pi} dx \ln(a_{+}^{-} b \cos x) = \pi \ln(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}).$$

Kąt ugięcia z kolei wynosi

$$\alpha(\vec{\theta}) = \theta_E \frac{D_s}{D_{ds}} \frac{\tilde{\theta}}{\theta}. \tag{117}$$

Zauważmy, że (109) przybiera teraz postać

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_E \frac{\tilde{\theta}}{\theta}. \tag{118}$$

Jeśli $\theta = \tilde{\theta}$, to kąt odchylenia kierunku obrazu od kierunku źródła jest równy kątowi Einsteina θ_E.

6.3. **Wybrane wyniki obserwacyjne.**
Zwicky był pierwszym badaczem, który zwrócił uwagę na kosmologiczne zastosowania efektów soczewkowania. W artykule opublikowanym w końcu lat trzydziestych dwudziestego stulecia podkreślił, że soczewkowanie pozwala określić masy galaktyk. Ponadto dzięki efektowi wzmocnienia można oczekiwać detekcji obiektów bardziej odległych, niż miałoby to miejsce w przypadku bez soczewkowania.

Na marginesie: istnieje mniejszościowy obóz astronomów kwestionujących (z różnych zresztą pozycji) standardowy model kosmologiczny, w tym postulat jednorodności przestrzeni. Mocnych argumentów dostarczył sceptykom poważany astronom Arp, który dostrzegł kilka grup kwazarów w pobliżu galaktyk o małym redshifcie. Kwazarów widzialnych jest stosunkowo niewiele i są one rozmieszczone prawie izotropowo. Tymczasem odkryto kilka przykładów bliskich galaktyk ($z \approx 0.01$*), w pobliżu których (w odległości kątowej 2 minut łuku) znajdują się 2-3 kwazary o redshifcie rzędu 1. Jest to statystycznie mało prawdopodobna sytuacja, ponieważ gęstość kątowa kwazarów jest mała. Prawdopodobieństwo przypadkowego ustawienia się 3 kwazarów w konfiguracjach opisywanych przez Arpa jest małe, rzędu jednego promila [41]. Istnienie układu związanego złożonego z kwazarów i bliskich galaktyk, który składałby się z obiektów o radykalnie różnych przesunięciach ku podczerwieni, byłoby nie do pogodzenia ze standardowym modelem kosmologicznym. Wyjaśnienie, które jest zgodne z tym modelem, przynosi teoria soczewek. Mianowicie bliskie galaktyki mogą ogniskować promieniowanie kwazarów położonych blisko kierunku patrzenia, zwiększając lokalnie populację możliwych do obserwacji kwazarów. Obszerną dyskusję tematu zawiera monografia [41].*

6.3.1. Wybrane zastosowania (silnego) soczewkowania grawitacyjnego. Silne soczewkowanie grawitacyjne promieniowania pochodzi z pojedynczych źródeł , a soczewka grawitacyjna ma na tyle dużą gęstość powierzchniową, że powstają obrazy wielokrotne; im więcej jest obrazów, tym mniej wątpliwości nastręcza kwalifikacja obserwacji jako soczewkowania. Kąty ugięcia są rzędu sekund łuku. Kryteria, jakie powinny być spełnione, by kwalifikacja była wiarygodna, wymienia Wambsganss [43].

Jest około dwudziestu kilku "silnych" soczewek ogniskujących źródła rozpoznane jako kwazary. Około 10 spośród nich uważa się za pewne. Najstarszy obiekt - obrazy kwazara QO957+561 - został odkryty w 1979 roku (patrz rys. 6 i 7 w [43] oraz rysunek na stronie 34; objaśnienia do tych - i innych niżej wspomnianych - rysunków zawierają informacje o zakresie promieniowania i o różnicy kątów obserwacji obrazów). Promieniowanie tego kwazara jest zmienne z przyczyn natury wewnętrznej, co pozwala określić czas opóźnienia wynoszący około

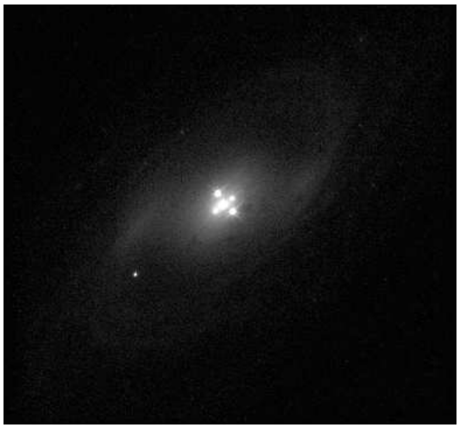


Figure 8. Krzyż Einsteina. Soczewka jest stosunkowo bliska (z=0.0394) żródłem promieniowania jest natomiast odległy kwazar (z=1.695). Obraz pochodzi z kolekcji Billa Keela, http://www.astr.ua.edu/keel/agn/q0957.html.

417 dni. Można stąd wyznaczyć wartość stałej Hubble'a (jeden z ostatnio uzyskanych wyników to $67^{-}_{+}13$ km/(sMpc) [43].

Pierwszy "pierścień Einsteina" odkryto w 1988 roku (patrz rys. 15 w [43]). Inny przykład — tzw. "krzyż Einsteina" — pokazuje poniższe zdjęcie.

Układ ten wykazuje periodyczne zmiany jasności poszczególnych obrazów, wywołane względnym ruchem obserwatora, soczewki i kwazara (patrz rys. 12 w [43]).

Tzw. wielkie łuki powstają wtedy, gdyźródłem romieniowania jest galaktyka, a soczewką masywna gromada galaktyk. Ze względu na niewystarczającą gęstość powierzchniową nie obserwuje sie kompletnych pierścieni Einsteina, ale ich fragmenty — łuki (patrz rysunki 15 i 16 w [43]).

6.3.2. Słabe soczewkowanie grawitacyjne. Polecam gruntowny przegląd autorstwa Bartelmanna i Schneidera [44].

W przypadku słabego ogniskowania analizuje się nie pojedyncze źródło ale statystyczną próbkę źródeł . Nie analizuje się tu wielokrotnych obrazów. Zasady bywają następujące:

i) zakłada się, że rozkład źródeł (tła) jest "typowy". Można rozumieć przez to np. kształt (eliptyczny) galaktyk tła; liczbę źródeł o zadanym redshifcie w zadanym wycinku kąta bryłowego; stałą proporcję źródeł o dużych redshiftach do ogółu źródeł .

ii) Szuka się, dla ustalonych soczewek grawitacyjnych, obserwacji naruszających powyższe zasady. Dla przykładu, nieregularność galaktyk (odstępstwa od dominującego kształtu) można wyjaśnić istnieniem ścinania. Lokalna zmiana gęstości źródeł o ustalonym przesunięciu ku podczerwieni może być wynikiem wzmocnienia grawitacyjnego. Soczewkowanie może także zwiększyć proporcję słabszych źródeł o redshifcie większym od progowego dla danej populacji obiektów.

Słabe soczewkowanie grawitacyjne zostało użyte od wyznaczenia masy szeregu gromad galaktyk (odnotujmy, że ich gęstość powierzchniowa jest o wiele mniejsza niż gęstość powierzchniowa galaktyk i na ogół obrazy wielokrotne nie mogą powstawać.)

6.3.3. Przykłady zastosowań wielkich łuków i słabego soczewkowania. W rosnącej, statystyce gromad galaktyk wyznaczono bezpośrednio masy za pomocą soczewkowania. Pomijam opis techniki ekstrakcji informacji - nie jest to proste wyznaczenie kąta odchylenia, ale złożona statystycznie analiza efektów wzmocnienia soczewkowego i ścinania. Patrz np. Taylor et al. [45], gdzie przedstawia się porównawcze szacowania masy gromady galaktyk Abell 1689. Masa tej gromady wynosi ok. 0.5×10^{15} M_0, przy czym różne metody - twierdzenie o wiriale, przybliżenie izotermiczne - dają podobne wyniki. Nb., wyznaczano tu masy([45]) masy w oparciu wymienione wyżej efekty związane z soczewkowaniem: wzmocnienia łukowe, słabe ścinanie i wzmocnienie soczewkowe.

Polecam przegląd znanych wyników w rozdziale 5.4 w [44] i zdjęcia gromady galaktyk Abell 2218 - rys. 16, str. 37, [43]; oraz gromady galaktyk CL0024+1654 - rys. 17, str. 37, [43].

Interesujący przykład możliwości metod opartych na soczekowaniu pojawił się w 2006 roku. Obserwacje zderzenia dwu gromad galaktyk (1E0657-558, $z = 0.296$) pozwoliły pokazać, że ich centrum grawitacyjne nie pokrywa się z centrum gazu międzygalaktycznego, który stanowi dominującą formę materii barionowej obecną w gromadach galaktyk. Oznacza to, że istnieje w tych galaktykach ciemna materia. Jest to zapewne pierwszy mocny argument poświadczający istnienie ciemnej materii w galaktykach nie wykorzystujący tzw. krzywych rotacji (patrz D. Clowe i inni, *The Astrophysical Journal*, **648**, L109-L113(2006)).

6.3.4. Mikrosoczewkowanie i) Mikrosoczewkowanie kwazarów przez indywidualne gwiazdy należące do galaktyk, które znalazły się na kierunku patrzenia. Jest to efekt słaby, kąty ugięcia są rzędu milionowych części sekund łuku. W rezultacie obrazy nie są rozłączne i obserwuje się fluktuacje jasności. Skala czasowa zjawiska jest rzędu lat. Przykład: zmiany jasności obrazów kwazara Q2237+0305 (rys. 12 w [43] oraz wykresy zmian jasności pozornej, rys. 13 w [43]).

ii) Mikrosoczewkowanie galaktyczne. B. Paczyński [46] zaproponował w 1987 roku wykorzystanie zjawiska soczewkowania do wykrywania zwartych, nieświecących, obiektów z halo Drogi Mlecznej. Źródła miały być znalezione spośród gwiazd (np. cefeid, jak w programie OGLE) z galaktyk Grupy Lokalnej, np. LMC (Dużych Obłoków Magellana). Podobnie jak w przypadku omówionym w punkcie poprzednim, efekt soczewkowania jest słaby. Kąt ugięcia jest rzędu milisekund łuku, wskutek czego obrazu nie są rozdzielone i można obserwować jedynie fluktuacje jasności pozornej. Skala czasowa zjawiska T jest rzędu miesiąca,

$$T = \approx 0.214\sqrt{\frac{M}{M_O}}\sqrt{\frac{D_L}{10\ kpc}}\frac{200km/s}{v_T} \tag{119}$$

(patrz wzór (43) w [43]). Jeśli przyjąć model rozkładu przestrzennego i rozkłady prędkości poprzecznej v_T, to analiza statystyczna soczewkowania pozwala na wyznaczenie masy soczewek.

Istnieje szereg programów badawczych (MACHO, OGLE i in.) zajmujących się wdrożeniem programu nakreślonego przez Paczyńskiego. Wyniki sprzed 1996 są przedstawione w [47]. Nowsze wyniki: np. [49], [48]. Dane na temat poszczególnych programów można znaleźć w internecie (adres programu OGLE: ftp://sirius.astrouw.edu.pl/ogle/ogle2/var_stars/lmc/cep/dmcep/).

Wyniki wskazują, że około połowa galaktycznego halo składa się ze zwartych obiektów o masie rzędu połowy masy Słońca.