## 4. Prawo Hubble'a

*4.1. Liniowe przybliżenie prawa Hubble'a w modelu k=0.*

Rozwijając prawą stronę wzoru (45) w szereg Taylora względem czasu dostaje się, w pierwszym rzędzie rozwinięcia

$$z = \frac{\dot{a_O}}{a_O}(t_O - t_E). \tag{62}$$

Z równania zerowych geodezyjnych (40) mamy (z tą samą dokładnością) $t_O - t_E = R$, gdzie $R$ jest promieniem powierzchniowym; $R$ pokrywa się z promieniem jasnościowym $D$ - patrz niżej - z dokładnością do członów liniowych. Stąd dostaje się prawo Hubble'a w najniższym przybliżeniu

$$z = H_0 R \tag{63}$$

lub $R = z/H_0$. (63) wiąże wartość prędkości ucieczki $H_0$ w chwili odbioru sygnału, "odległość" od źródła $R$ (także w czasie odbioru) i przesunięcie ku podczerwieni $z$ linii emisyjnych.

*4.2. Uwagi o niektórych miarach odległości w kosmologii.*

*i) Odległość kątowa (promień kątowy) jest definiowana następujaca. Niech $dS$ oznacza poprzeczny rzeczywisty rozmiar obiektu widzianego przez obserwatora w kącie bryłowym $d\Omega$. Promieniem kątowym nazywa się współczynnik $r_A$ (z angielska "angular distance" — stąd indeks a w oznaczeniu $r_A$) występujący w relacji $dS = r_A^2 d\Omega$. Dowiedziono, że $r_A = R/(1+z)$; jest to nietrywialne twierdzenie, które dowiódł w sposób ostateczny R. Penrose (podaję za: J. Kristian i R. K. Sachs, APJ (1966)). Przy odpowiednim wyborze normalizacji czynnika skali a można osiągnąć równość promienia współrzędnościowego i promienia kątowego w ustalonej chwili czasu (np. dla $z = 0$).*

*ii) Promień jasnościowy (fotometryczny) definiuje się wzorem*

$$D = \sqrt{\frac{L}{4\pi M}}, \tag{64}$$

*gdzie L jest jasnością absolutną (mocą) źródła E zaś M jest jasnością obserwowaną przez obserwatora O. W czasoprzestrzeni płaskiej odległość jasnościowa pokrywa się ze standardową odległością, $D = R_0$, gdzie $R_O$ jest promieniem powierzchniowym sfery o środku w E przechodzącej przez* 0. *W kosmologii ta relacja nie jest prawdziwa. Dowodzi się natomiast:*

**Twierdzenie.** Wielkość $R_0(1+z)$, w której $R_O$ jest promieniem powierzchniowym sfery o środku w $E$ przez przez 0 w momencie detekcji, jest równa promieniowi jasnościowemu (fotometrycznemu) $D$.

**Dowód.** Przedstawię wersję dowodu znaną jako "kwantową" ( w terminologii Weinberga)lub "korpuskularną" (w/g Tolmana). Odwołamy się do obrazu promieniowania elektromagnetycznego jako roju fotonów o **zachowanej liczbie fotonów**: w przeciągu interwału czasowego $dt_E$ emitowanych jest $dn$ fotonów, które wszystkie docierają do obserwatora w czasie $dt_O$. Mamy jasność absolutną $L = h\nu_E dn/dt_E$ i jasność obserwowaną $M = h\nu_O dn/dt_O/(4\pi R_O^2)$. Udowodnienia tezy Twierdzenia wymaga teraz jedynie skorzystania z wcześniejszych wyników o skalowaniu częstości i interwałów czasowych $dt_0$, $dt_E$.

**Ćwiczenie IV.1. (Trudne))** *Dowieść związku z powyższego twierdzenia w ramach falowej teorii promieniowania elektromagnetycznego.*

*Wskazówka: wykorzystać metodę Robertsona z pracy* **The apparent luminosity of a receding nebula**, *Zeitschrift für Astrophysik* **15**, *69-81(1937).*

Promień powierzchniowy $R_O$ nie jest bezpośrednio mierzalny. Dla kontrastu, promień kątowy jest w zasadzie obserwablą, zaś pomiar promienia jasnościowego wymaga wyznaczenia 2 jasności, jednej bezpośrednio ($M$) a drugiej w oparciu o identyfikacjętypu źródła (patrz następny rozdział  o świecach standardowych). Dla obiektów kosmologicznych obie miary odległości są różne, bowiem $r_A = D/(1+z)^2$.

*4.3.* **Dokładna relacja Hubble'a.**
Niech źródło promieniowania o znanym redshifcie $z$ znajduje się w punkcie $r_E = 0$ zaś odbiornik w punkcie $r_o$. Radialna trajektoria zerowa dana jest równaniem

$$\frac{dt}{a} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{65}$$

Calkowanie równania (65) od $r_E = 0$ do $r_o$ prowadzi do równości

$$\int_{t_E}^{t_o} \frac{dt}{a} = \int_0^{r_o} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{66}$$

($t_E$ jest czasem emisji zaś $t_o$ czasem odbioru sygnału.) Prawa strona jest dana elementarną funkcją. Poniżej naszkicuję całkowanie lewej strony.

Korzystnie jest przeprowadzić dwukrotną zmianę zmiennej całkowania. Zauważmy, że $dt = da/(aH)$ (z definicji $H$). Z definicji redshiftu $z$ mamy $da = -dz(a)^2/a_0$. Po podstawieniu do lewej strony (66) otrzymujemy

$$\int_0^z \frac{dz}{Ha_0} = \frac{1}{H_0 a_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^2(1-\Omega_{r0}-\Omega_{p0}-\Omega_{\Lambda 0}) + \Omega_{r0}(1+z)^2 + \Omega_{p0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}}}; \tag{67}$$

równość wynika z podstawienia za $H$ wyrażenia wyliczonego z (59).

Zatem dokładnym prawem Hubble'a jest

$$H_o a_0 \int_0^{r0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^2(1-\Omega_{r0}-\Omega_{p0}-\Omega_{\Lambda 0}) + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{p0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}}}.) \tag{68}$$

Przeanalizuję parę przypadków szczególnych.

*4.4.* **Płaski wszechświat.**
Model $k = 0$. Lewa strona (68) jest wtedy równa $H_0 a_0 r_0 = H_0 R_0 = H_0 D/(1+z)$, gdzie $D$ jest odległością jasnościową (patrz wyżej). Prawa strona jest dana całką

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{p0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}}}.) \tag{69}$$

Można tu zaniedbać energię radiacyjną, $\Omega_{ro} \approx 0$. Wtedy otrzymamy

$$\int_0^z dz \frac{1}{\sqrt{1+\Omega_{po}(z^3+3z^2+3z)}}.) \tag{70}$$

Ograniczając się do wyrazów rzędu $z^2$, otrzymujemy przybliżone prawo Hubble'a

$$H_0 D = z(1+z)(1-\frac{3}{4}\Omega_{po} z) \approx z(1+\frac{z}{2}(1-q_o)).) \tag{71}$$

Wykorzystany tutaj został  związek $3\Omega_{po}/2 = 1 + q_o$.

*4.5.* **Inne przykłady.**
*Ćwiczenie IV.2. Założyć* $\Omega_{ro} = 0$ *i* $\Lambda = 0$. *Pokazać, że (68) prowadzi do*

$$DH_0 = \frac{zq_0 + (q_0 - 1)(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1})}{q_0^2}. \tag{72}$$

Wynik ten uzyskał Mattig [23] w 1958 roku. Obowiązuje on dla wszystkich modeli kosmologicznych. Inne wyprowadzenie czytelnik znajdzie w [1].

III. *Ćwiczenie IV.3. Pokazać, że dla* $z << 1$ *z równania (68) można wyprowadzić z dokładnością do wyrazów* $z^2$

$$DH_0 = z(1 + z\frac{1 - q_o}{2}). \tag{73}$$

*(73) jest słuszne dla wszystkich modeli kosmologicznych oraz uwzględnia wszystkie wymienione wyżej rodzaje materii.*

*Wskazówki: rozwinąć wyrażenie podcałkowe w (68) i skorzystać z relacji* $q = \Omega_p/2 - \Omega_\Lambda$.

Uwaga: liniowa relacja Hubble'a (63) wynika natychmiast z (73). Co więcej widać, że obowiązuje ona we wszystkich modelach kosmologicznych.

*4.6.* **Wyniki obserwacyjne.**
Peebles w rozdziale *Neoclassical cosmological tests* [9] (patrz także Weinberg) wyprowadza relację związaną z powyższym wzorem

$$m - M - 5\log h = 42.38 + 5\log z - 1.086(q_0 - 1)z + ... \tag{74}$$

gdzie m i M są odpowiednio wielkością gwiazdową i absolutną wielkością gwiazdową galaktyki. (Wskazówka: zlogarytmować relacjęHubbe'a i wykorzystać definicje wielko'sci gwiazdowych - patrz następny rozdział.) Można stąd w zasadzie policzyć $q_0$, jeśli inne wielkości są znane z obserwacji z wystarczająco dużą dokładnością.

W 1998 roku pojawiła się seria prac – teraz (w roku 2010) ich wyniki uznawane są za początek nowej epoki, epoki "dokładnej kosmologii" ("Precision cosmology") [27] – w których między innymi podano wartości opóźnienia $q_0$. Riess i inni [26] testowali m. in. relację Hubble'a w przybliżeniu małych przesunięć ku podczerwieni - patrz (71)

$$DH_0 = z + \frac{z^2}{2}(1 - q_0). \tag{75}$$

Otrzymane wyniki nie wykluczały możliwości, że $q_0 < 0$, co sugerowałoby potrzebę wprowadzenia stałej kosmologicznej. W/g Straumanna, *On the Cosmological Constant Problems and the Astronomical Evidence for a Homogeneous Energy Density with Negative Pressure* (astro-ph/0203330) parametr $\Omega_\Lambda$ można — opierając się na danych obserwacyjnych — związać z parametrem $\Omega_M$ (opisującym wszystkie standardowe rodzaje nierelatywistycznej materii) przybliżoną równością $\Omega_\Lambda = 1.3\Omega_M + (0.3 \mp 0.2)$.

Nowsze wyniki (np. [29] nie wprowadzają zasadniczej korekty, chociaż sugerują większą dokładność.