2. Matematyczny model wszechświata.

Równania Ensteina mają postać

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{2}$$

Uwaga. Powyżej przyjąłem konwencję, w której $c = G = 1$. Lewa strona tego równania zawiera informacje o metryce $g_{\mu\nu}$ (a więc np. o stosunku długości obwodu $2\pi R$ sfery geodezyjnej do jej promienia L) a prawa strona informacje o materii. Bez wnikania w szczegóły, okazuje się, że tutaj stosunek $\frac{S}{4\pi L^2}$ (lub $\frac{L}{2\pi R}$), gdzie S jest polem sfery, na ogół jest różny od 1. Co więcej, stosunek ten zależy od rozkładu masy lub fal grawitacyjneych.

Prawa strona równania zawiera informacje o materii; $T_{\mu\nu}$ jest tensorem energii i pędu pól materii. Standardowy model kosmologiczny wymaga izotropowości i jednorodności. Przez wzgląd na przyszłe zastosowania omówię szerszą — sferycznie symetryczną klasę rozwiązań. Co do materii, zakładam (o ile nie będzie inaczej powiedziane), że jest to gaz doskonały, tj. o izotropowym ciśnieniu (patrz rozdział II.5.2 poniżej).

2.1. Metryka i równania

Poniżej przedstawiam równania Einsteina w najprostszej postaci, dla potrzeb kosmologii zupełnie wystarczającej. Zakładamy najpierw sferyczną symetrię i zapisujemy równania tak aby jawnie rozszczepić część ewolucyjną od więzów początkowych. Najbardziej ogólna sferycznie symetryczna metryka może być wybrana następująco:

$$ds^2 = -N^2dt^2 + adr^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2. \tag{3}$$

Uwaga. Symbol "a" będzie używany w tym cyklu wykładów w co najmniej trzech różnych znaczeniach. Wykład drugi przyniesie dwie różne wielkości oznaczone przez a. Mając nadzieję, że czytelnik jest wystarczająco zahartowany by sobie poradzić, dołożę starań, by uniknąć niejednoznaczności.

Średnia krzywizna sfery geodezyjnej (tj. zbiór punktów P takich, że $L(P) = const$) scentrowanej w środku symetrii jest dana wzorem

$$p = \frac{2\partial_r R}{\sqrt{a}R} \tag{4}$$

Wybiorę, jak informowałem wyżej, opis ewolucji z rozdzieleniem na hiperpowierzchnie stałego czasu i czas (tzw. foliacja 1+3). W tym celu definiuję tzw. krzywizny zewnętrzne [15], które opisują zmiany w czasie składowych tensora metrycznego. W przypadku sferycznie symetrycznym jest tych składowych 3, ale można je związać dodatkowym warunkiem, ze względu na swobodę scechowania. Jedyne różne od zera składowe krzywizny zewnętrznej to

$$trK = \frac{\partial_t(\sqrt{a}R^2)}{N\sqrt{a}R^2} \quad K^r_r = \frac{1}{2Na}\partial_t a \quad K^\phi_\phi = K^\theta_\theta = \frac{\partial_t R}{NR} = \frac{1}{2}(trK - K^r_r) \tag{5}$$

$trK \equiv K^i_i$ nazywa się śladem krzywizny zewnętrznej. Równania Einsteina można podzielić na więzowe (zawierające tylko pierwsze pochodne metryki) i dynamiczne.

Mamy dwa równania więzowe, więz hamiltonowski (poniżej ρjest gęstością energii mierzoną przez współporuszającego się obserwatora, $\rho = T_{\mu\nu}(U^\mu U^\nu = -T^0_0$):

$$\frac{\partial_r}{\sqrt{a}}(pR) =$$

$$-R(8\pi\rho + \frac{3}{4}(K^r_r)^2)) - Rp^2\frac{1}{4} + \frac{1}{R} + \frac{R}{4}(trK)^2 + \frac{R}{2}trKK^r_r, \tag{6}$$

oraz więz pędowy (poniżej $j_r = NT_r^0$ jest gęstością radialnej składowej pędu):

$$\partial_r(K_r^r - trK) = -\frac{3}{2}p\sqrt{a}K_r^r - 8\pi j_r + \frac{\sqrt{a}}{2}ptrK \tag{7}$$

W przypadku sferycznie symetrycznym i dla izotropowego ciśnienia jest tylko jedno równanie ewolucji

$$\partial_t(K_r^r - trK) = \frac{3N}{4}(K_r^r)^2 - \frac{Np^2}{4} - \frac{p}{\sqrt{a}}\partial_r N + \frac{N}{R^2} +$$
$$8\pi NT_r^r + \frac{3}{4}N(trK)^2 - \frac{3N}{2}trKK_r^r \tag{8}$$

Równanie na tzw. lapse N ma postać

$$\nabla_i\partial_i N = [\frac{3}{2}(K_r^r)^2 + 4\pi(\rho + T_i^i)]N + (\frac{1}{2}(trK)^2 - trKK_r^r)N + \partial_0 trK \tag{9}$$

Równanie więzu pędowego może być scałkowane, z dokładnością do dowolnej funkcji trK,

$$RK_r^r - RtrK = \frac{C_1 - 8\pi\int_0^R \frac{2\tilde{R}^2 j_r}{\sqrt{a}p}d\tilde{R}}{R^2} - 2\frac{\int_0^R trK\tilde{R}^2 d\tilde{R}}{R^2} \tag{10}$$

Także pozostałe z wypisanych wyżej równań można przekształcić, w wybranych cechowaniach, do postaci całkowej. Popularnym cechowaniem jest przyjęcie $K_r^r = trK$ (tzw. cechowanie polarne).

Ćwiczenie. Czytelnik może sprawdzić, że wówczas powyższe równania redukują się do powszechnie znanych równań, np. tych znanych z "Teorii pola" Landaua i Lifszyca [16].

Innym popularnym cechowaniem jest tzw. cechowanie maksymalne [15], gdy $trK = 0$. Przez pewien czas sądzono, że taki wybór cechowania jest odpowiedniejszy niż inne dla badania ewolucji układów samograwitujących. Cechowanie $K_r^r = K_\phi^\phi = K_\theta^\theta = H(t)$ nazywa się wyborem współrzędnych bez ścinania; jest ono wybierane w rozwiązaniach kosmologicznych, patrz niżej.

2.2. Równania ciągłości materii.

Równania ciągłości $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ wynikają z geometrycznego charakteru lewej strony równania Einsteina. Okazuje się, że $\nabla_\mu(R_\nu^\mu - g_\nu^\mu R/2) = 0$, na mocy tożsamości Bianchi; z równań Einsteina otrzymujemy prawa zachowania pól materii, które mają postać, w przypadku sferycznej symetrii

$$\frac{\nabla_\mu T_r^\mu}{\frac{\sqrt{a}}{N}} =$$
$$\Big[\partial_0(\frac{NT_r^0}{\sqrt{a}}) + \frac{N^2}{\sqrt{a}}(K_r^r + trK)T_r^0 + \frac{N}{\sqrt{a}}\partial_r T_r^r$$
$$+\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_r N(T_r^r - T_0^0) + Np(T_r^r - T_\phi^\phi) = 0$$
$$\nabla_\mu T_0^\mu =$$
$$\partial_0 T_0^0 - \frac{N}{\sqrt{a}}\partial_r(\frac{NT_r^0}{\sqrt{a}}) - \frac{N^2}{\sqrt{a}}pT_r^0 -$$
$$\frac{2N}{a}\partial_r NT_r^0 - NK_r^r(T_r^r - T_\phi^\phi) -$$
$$NtrKT_\theta^\theta + NtrKT_0^0 = 0. \tag{11}$$

Przypominam o założeniu poczynionym na wstępie II rozdziału, zgodnie z którym materia rozważana w tym tekście jest cieczą doskonałą o izotropowym ciśnieniu, $T_r^r = T_\phi^\phi = T_\theta^\theta$. Każde odstępstwo od tego założenia będzie sygnalizowane.

2.3. Geometryczne konteksty geometrii Friedmana.
Geometryczny kontekst postulatów jednorodności i izotropowości zauważyli najpierw Robertson i Walker (lata 1930-te), stąd w nazwie metryki wypisanej dalej pojawiają się ich nazwiska: metryka Friedmana-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW).

Maksymalnie symetryczna 3-wymiarowa podrozmaitość zakrzywionej 4-wymiarowej przestrzeni jest zdefiniowana jako obiekt inwariantny (pochodne Liego względem generatorów przekształceń znikają) względem 3-wymiarowej grupy przekształceń — obrotów przestrzennych i 3 translacji przestrzennych. Innymi słowy, istnieje 6 wektorów Killinga, tzn. liniowo niezależnych wektorów X_μ spełniających równania Killinga

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0. \tag{12}$$

Powyżej mamy pochodną kowariantną

$$\nabla_i Xj = \partial_i X_j - \Gamma^k_{ij} X_k,$$

gdzie

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{g^{kl}}{2}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}).$$

Czasoprzestrzeń, która ma maksymalnie symetryczne hiperpowierzchnie stałego czasu spełnia I postulat modelu standardowego. Maksymalnie symetryczne czasoprzestrzenie są sklasyfikowane; w przypadku nas interesującym odnotowujemy zaledwie trzy możliwości, z dokładnością do czynnika konforemnego. Więcej można znaleźć w podręczniku Weinberga *Gravitation and Cosmology* .

Ćwiczenie. Znaleźć wszystkie niezależne liniowo wektory Killinga dla metryki

$$ds^2 = +a^2(t)(d\vec{x})^2 \tag{13}$$

oraz dla metryk zadanych wzorem (16) (patrz poniżej, $k =^+_- 1$).

2.4. Kosmologia — foliacje stałej (na powierzchni Cauchy'ego) krzywizny zewnętrznej. Równania Friedmana-Lemaitre'a -Robertsona- Walkera.
Założenie jednorodności i izotropowości (maksymalnej symetrii, jak wspomnieliśmy wyżej) na hiperpowierzchniach stałego czasu oznacza, że można wybrać $\rho = \rho(t), j_r = 0$ oraz postać metryki daną poniższym wzorem. Można to sprawdzić pokazując, że równania z poprzedniego podrozdziału nie są sprzeczne przy tych założeniach. Postać tych równań jest podana w drugiej części podrozdziału. Metryka może być wybrana w postaci

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\Big(dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)\Big); \tag{14}$$

Bez utraty ogólności można przyjąć $d\tilde{\tau} = Ndt$. Powyżej $f(r) = r$ (dla płaskiego wszechświata, $k = 0$) lub $f(r) = \sin(r)$ (jeśli k=1) $f(r) = sinhr(r)$ (jeśli k=-1). Jeśli przyjąć $d\tilde{\tau} = ad\tau$, to otrzymamy

$$ds^2 = a(t)\Bigg(-(d\tau)^2 + \Big(dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\Big)\Bigg). \tag{15}$$

Zauważmy, że metryka (14) może być zapisana także jako

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\Big(\frac{1}{1-kx^2}dx^2 + x^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\Big) \tag{16}$$

(wystarczy przedefiniować czas i przyjąć nową zmienną radialną $x = f(r)$.) Inna możliwość to uogólnienie współrzędnych kartezjańskich:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\Big(d\vec{x}^2 + \frac{k}{1-kx^2}\,(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2\Big) \tag{17}$$

Układ współrzędnych (14) jest układem współporuszającym się – przykładem opisu lagranżowskiego znanego z mechaniki płynów. Jeśli wyobrazić sobie materię w formie cząstek pyłu (cieczy), to każda cząstka niesie ze sobą ustaloną wartość współrzędnej przestrzennej. W klasie rozwiązań opisywanej metryką (14) lub metryk pochodnych cząstki materii mają *prędkość współrzędnościową* równą zeru. Odległość między nimi wzrasta, ale nie na skutek zmiany współrzędnych (te są raz na zawsze ustalone dla każdej cząstki) ale na skutek zmiany tensora metrycznego w czasie.

Krzywizna zewnętrzna jest dana wzorem

$$\begin{aligned} 3H &= trK = 3\frac{\dot{a}}{a} \\ K^r_r &= K^\phi_\phi = K^\theta_\theta = \frac{\dot{a}}{\tilde{R}} = H(t). \end{aligned} \tag{18}$$

I tutaj i w dalszej części tekstu zakładam $\dot{X} \equiv \frac{dX}{dt}$. Wielkość $H(t)$ pojawiająca się wyżej nazywa się stałą Hubble'a. Weźmy kulę współrzędnościową zamkniętą sferą o promieniu współrzędnościowym x. Łatwo sprawdzić, że $\frac{d}{dt}\ln V = 3H$; stała Hubble'a oznacza więc zmianę geometrii — jej "puchnięcie" ($H < 0$) lub "kurczenie" ($H > 0$).

Krzywizna skalarna (skalar Ricciego) powierzchni stałego czasu jest dana wzorem $R^3 = \frac{6k}{a^2}$. Średnia krzywizna p sfery ośrodkowej może być wyliczona w oparciu o wzór (4); dostaje się wynik $(px)^2a^2 = 4(1-kx^2)$. (Uwaga: promień powierzchniowy $R = xa$.) Po skorzystaniu z równań poprzedniego podrozdziału otrzymuje się:

i) równanie więzu hamiltonowskiego

$$8\pi\rho = 3H^2 + \frac{3k}{a^2}. \tag{19}$$

ii) równanie ewolucji

$$-\dot{H} = \frac{k}{2a^2} + 4\pi T^r_r + \frac{3}{2}H^2. \tag{20}$$

ii) jedyne istotne równanie ciągłości, poniżej używam $p = T^r_r$,

$$\dot{\rho} = -3H(p+\rho). \tag{21}$$

Jeśli założyć równanie stanu, na przykład barotropowe równanie $p = F(\rho)$, to z powyższych 3 równań tylko 2 są niezależne.

Uwagi.

Równanie hamiltonowskie można wyprowadzić, dla pyłu (tzn., jak się okaże, dla cieczy — gazu — o znikającym ciśnieniu $p = 0$*), w oparciu o nierelatywistyczne przesłanki (np. str. 201 w [17]).*

Wielkość $\Omega = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi}}$ *- stosunek gęstości do gęstości krytycznej - nazywa się parametrem gęstości. Jest ona większa od 1 dla k=1, równa 1 dla k=0 (tzw. wartość krytyczna) oraz mniejsza od 1 dla k=-1.*

Rugując H^2 za pomocą więzu hamiltonowskiego (19) otrzymuje się z równania ewolucji

$$-\dot{H} = -\frac{k}{a^2} + 4\pi(p+\rho). \tag{22}$$

Ćwiczenie II.1. Przyjąć $\rho = p = 0$ i rozwiązać powyższe równania dla $k = -1$. Zinterpretować otrzymane rozwiązanie.

Ćwiczenie II.2 Przyjąć $p = 0$ (założenie, że materia jest pyłem) i rozwiązać powyższe równania dla $k = 0$. Sprawdzić (przy założeniu dodatniości początkowej wartości H), że czas światowy $t = 2/(3H(t)$ oraz $H(t) > 0$ i $\frac{d^2a}{dt^2} < 0$ dla każdego $t < \infty$.

2.5. Wnioski wynikające z modeli FLRW

Z równań poprzedzającego rozdziału można wyciągnąć pewne wnioski. Pierwszą ich grupę, którą można zinterpretować jako *Twierdzenia o względnym ruchu galaktyk*, formułuję i uzasadniam w pierwszej części wykładu. Inne — szacowanie kosmologicznego wieku Wszechświata — przedstawiam w końcowych podrozdziałach.

2.5.1. Twierdzenia o względnym ruchu "odległych galaktyk" Celem poniższych rozważań jest uogólnienie wyników Ćwiczenia II.2 otrzymanych dla pyłowego i płaskiego wszechświata.

Twierdzenie 1 Niech k=0, -1, $H(t_0) > 0$ i $\rho(t_0) > 0$ oraz $\rho \geq |p|$. Wtedy stała Hubble'a maleje ((szybkość ekspansji maleje), $\partial_t H \leq 0$, przy czym $H(t) > 0$ dla każdego skończonego $t > t_0$ (Innymi słowy, przy przyjętych założeniach ekspansja jest wieczna w modelach wszechświata otwartych i płaskim).

Dowód: część pierwsza jest natychmiastowym wniosek z równania (22). Część drugą (dodatniość H) dowiodę niewprost. Niech istnieje skończone $t_1 = \min[t > t_0 : H(t) = 0]$; zatem $H(t_1) = 0$. Wtedy w przedziale $[t_0, t_1]$ mamy $H(t) \geq 0$. Pokażę, że w omawianym przedziale $a(t) < \infty$. Równanie ciągłości implikuje, przy założeniu, że $\rho \geq |p|$, że $\rho(t) \leq \rho(t_0) \equiv \rho_0$. Korzystając z tej nierówności, otrzymujemy z równania więzu hamiltonowskiego

$$H^2 \leq \frac{8\pi\rho_0}{3} - \frac{k}{a^2}. \tag{23}$$

Biorąc dodatnie pierwiastki z obu stron i wykorzystując algebraiczną nierówność $\sqrt{A^2 - k} \leq A + 1$, wnioskujemy, że

$$\partial_t a \leq a\sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}} + 1. \tag{24}$$

Stąd z kolei wynika

$$a \leq a(t_0)e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1). \tag{25}$$

gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}}$. Zatem w omawianym przedziale mamy $a < \infty$.

Równanie ciągłości wraz z uprzednim warunkiem energetycznym prowadzi także do innej nierówności

$$\partial_t \ln(\rho a^6) \geq 0, \tag{26}$$

skąd mamy inne oszacowanie $\rho(t)a^6(t) \geq \rho(t_0)a^6(t_0) > 0$.

Z obu informacji wnioskujemy, że w omawianym przedziale $\rho(t) > 0$, co po włożeniu do więzu hamiltowskiego daje $H(t) > 0$, dla $t\epsilon[t_0, t_1]$. Pozostaje to w sprzeczności z przyjętym założeniem $H(t_1) = 0$.

Uwaga.

1. Warunek $\rho \geq |p|$ jest na tyle słaby, że pozwala uwzględnić dodatnią stałą kosmologiczną Λ. (Patrz rozdział II.B.4.)

2. Warunek $|p| \leq \rho$ można zastąpić przez $-\rho \leq p \leq C\rho$, gdzie $C < \infty$.

Zakładając, że $3p + \rho \geq 0$ (tzw. dominujący warunek energetyczny), mamy następujący wynik.

Twierdzenie 2) Niech $k = 0, \pm 1$. Przy założeniu że $3p + \rho > 0$, druga pochodna a jest ujemna i $\partial_0 a$ maleje.

Wstawiając do równania ewolucji $H = \frac{\partial_t a}{a}$, otrzymuje się (po ponownym wykorzystaniu więzu hamiltonowskiego)

$$\partial_t^2 a = -4\pi a(p + \frac{\rho}{3}). \tag{27}$$

Dowodzi to natychmiast słuszność Twierdzenia 2.

Twierdzenie 2 oznacza, że funkcja H maleje — ale na mocy twierdzenia 1 zawsze pozostaje dodatnia — jeśli $k = 0, -1$, bowiem

$$\partial_t H = -H^2 + \partial_t^2 a/a < 0$$

.

Dla modelu zamkniętego (k=1) jest inaczej, jak łatwo orzekonać się rozwiązując model pyłowy. Funkcja H może zmienić znak i a osiąga maksymalną wartość, po czym maleje (rekolaps — powtórne zapadanie grawitacyjne). Szczegółowa postać rozwiązania w ogólnym przypadku zależy od równania stanu — związku pomiędzy p i ρ[16].

2.5.2. Dygresja o równaniach stanu i warunkach energetycznych Przyjmijmy dalej tensor energii i pędu właściwy dla cieczy (gazu),

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{28}$$

gdzie U_μ oznacza wektor czteroprędkości, $U_\mu U^\mu = -1$. Wówczas we współrzędnych współporuszających się ($U_i = 0$, co oznacza także $j_i = 0$) mamy $T_i^i = p$ (nie ma tu sumowania, $i = r, \theta, \phi$) oraz $-T_0^0 = \rho$. p nazywa się ciśnieniem.

Od momentu tzw. rekombinacji ciśnienie galaktyk jest zaniedbywalne, można więc przyjąć $p = 0$.

Standardowy gaz (ciecz) charakteryzuje się nieujemnym ciśnieniem, $T_r^r = p \geq 0$. Jednoskładnikowy gaz spełnia równanie $p = K\rho^\Gamma$, gdzie wykładnik spełnia warunki $1 \leq \Gamma \leq 5/3$. Można pokazać (np. Landau, Lifszic, "Hydrodynamika"), że małe zaburzenie gęstości gazu rozchodzi się zgodnie z równaniem hiperbolicznym (D'Alemberta), w którym prędkość charakterystyczna $a = \sqrt{\partial_\rho p} = \sqrt{\Gamma p/\rho}$, tj. $p = a^2\rho/\Gamma$. Prędkość a (prędkość dźwięku) nie powinna przekraczać prędkości światła, $a \leq 1$. Stąd standardowy gaz spełnia warunki energetyczne

$$0 \leq p \leq \rho. \tag{29}$$

W temperaturze pokojowej $a^2 \approx 10^{-11}$, więc $p << \rho$.

Gaz, dla którego $p = 0$ nazywa się pyłem. Wielkoskalowe własności materii opisuje się kładąc ciśnienie równe zeru.

Astrofizycy często nazywają wykładnikiem adiabatycznym współczynnik przy ρ, dla izotermicznego równania stanu $p = (\Gamma - 1)\rho$. Wtedy $1 \leq \Gamma \leq 2$ zapewnia spełnienie warunków energetycznego (29).

2.6. Opóźnienie.

Zdefiniujmy opóźnienie ("decceleration parameter") q,

$$q = -\partial_0^2 a \frac{a}{(\partial_0 a)^2} =$$

$$\partial_0 \frac{1}{H} - 1 = \frac{-\partial_0 H - H^2}{H^2}; \tag{30}$$

z równania (27) oraz (19) otrzymujemy inną postać równania

$$q = \frac{4\pi(p+\rho/3)}{8\pi\rho/3 - \frac{k}{a^2}} \approx \frac{\Omega}{2}; \tag{31}$$

wykorzystałem tutaj $p << \rho$, co jest z pewnością spełnione po erze rekombinacji. Znajomość parametru opóźnienia i równania stanu mogłaby w zasadzie dostarczyć informacji o typie wszechświata. W epoce współczesnej przyjmuje się $p = 0$, stąd można by oczekiwać $q = 1/2$ w modelu k=0 oraz $q > 1/2$ lub $q < 1/2$, w modelach, odpowiednio, zamkniętym (k=1) lub otwartym (k=-1).

Podobnej informacji dostarczyłaby zresztą także znajomość gęstości energii ρ, jak widać z równania więzu hamiltonowskiego. Wielkość

$$\Omega = \frac{\rho}{3H^2/(8\pi)} \tag{32}$$

jest równa 1 dla wszechświata z modelu k=0 i mniejsza lub większa od 1 stosownie do wartości $k =^+_- 1$. Teoretycznie możliwe jest niezależne obserwacyjne określenie q oraz ρ/H^2. Jest to wykonalne przynajmniej w zasadzie, bowiem pierwsza z obu wielkości wymaga pomiaru zmienności odwrotności stałej Hubble'a, druga zaś wyznaczenia wartości stałej Hubble'a i gęstość energii. W obu przypadkach są to wielkości w zasadzie mierzalne obserwacyjnie. H zmienia się jednak powoli — około 2 $cm/sec/rok$, przy H = 65km/s/Mpc — bezpośredni pomiar zmiany stałej Hubble'a jest niemożliwy. Można jednak wyznaczyć opóźnienie w sposób pośredni, wykorzystując dokładne prawo Hubble'a (omawiane w jednym z następnych wykładów) i dane z obserwacji supernowych typu Ia. Druga metoda — pomiar gęstości masy i H — pozwala wyznaczyć Ω. Z oczywistych względów otrzymuje się wielkość niedoszacowaną, ale jest ona znacząco mniejsza od 1; jeśli ogół kosmologów nie akceptuje tych obserwacji jako dowodu otwartości Wszechświata, to nie tylko ze względu na niepewność obserwacji, ale i z innych powodów.

2.7. Stała kosmologiczna a opóźnienie

Wprowadzenie stałej kosmologicznej do równań Einsteina

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = 8\pi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \tag{33}$$

sprowadza się do następujących zmian w poprzedzających równaniach. Gęstość energii ρ należy zastąpić przez $8\pi\rho + \Lambda$ zaś ciśnienie p przez $8\pi p - \Lambda$. Warunek dodatniości energii sugeruje, że należy założyć dodatniość stałej kosmologicznej; to z kolei sprawia, że całkowite ciśnienie $8\pi p - \Lambda$ może stać sie ujemne. W konsekwencji dowiedzione wcześniej twierdzenie (Tw. 2) o ekspansji mogą nie obowiązywać.

Pełny komplet równań ma postać:

i) równanie więzu hamiltonowskiego

$$8\pi\rho + \Lambda = 3H^2 + \frac{3k}{a^2}; \tag{34}$$

ii) równanie ewolucji

$$-\partial_t H = \frac{k}{2a^2} + 4\pi p - \frac{\Lambda}{2} + \frac{3}{2}H^2 = 4\pi(\rho+p) - \frac{k}{a^2}; \tag{35}$$

iii) równanie ciągłości

$$\partial_0\rho = -3H(p+\rho). \tag{36}$$

Ćwiczenie II.3. Wyprowadzić rozwiązanie de Sittera. *($k = \rho = p = 0$, stała kosmologiczna $\Lambda > 0$.)*

Opóźnienie q jest dane wzorem

$$q = \frac{\frac{-\Lambda}{3} + 4\pi(p + \rho/3)}{\frac{\Lambda}{3} + 8\pi\frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2}} \approx \frac{4\pi\rho - \Lambda}{3H^2}. \tag{37}$$

Twierdzenie o opóźnieniu. ($k = 0, \pm 1$. Jeśli $4\pi(p + \rho/3) - \Lambda/3 \approx (4\pi\rho - \Lambda)/3 \geq 0$, to $q > 0$, tj. ekspansja wszechświata ulega spowolnieniu, $\partial_t^2 a \leq 0$. I odwrotnie, jeśli $4\pi(p+\rho/3)-\Lambda/3 \approx (4\pi\rho-\Lambda)/3 \leq 0$, to $q < 0$, tj. ekspansja wszechświata ulega przyśpieszeniu, $\partial_t^2 a \geq 0$.

Wprowadzenie stałej kosmologicznej (jest to jedna z możliwych form ciemnej energii) jest najprostszym sposobem uzyskania efektu przyśpieszonego rozszerzania. Warto tu jednak podkreślić, że stosunek Λ/ρ zmienia sie w czasie (zwykle rośnie), co oznacza zmianę znaku $(4\pi\rho - \Lambda)$. Zatem najbardziej prawdopodobnym scenariuszem jest taki, w którym Wszechświat najpierw spowalnia ekspansję a następnie przyśpiesza. Istnieją obserwacje, które (z wieloma zastrzeżeniami ale jednak) potwierdzają taki obraz (np. M. S. Turner i A. G. Riess, astro-ph/0106051). Sugerują one, że faza przyśpieszenia rozpoczęła się około $z = 0.5$.