

## Mechanika kwantowa III, zestaw 8

**Zad. 1.** W oparciu o redukcję równania Diraca z zestawu 7 przeprowadzić analizę spektrum stanów związanych dla atomu wodoropodobnego  $V(r) = -Ze^2/r$ :

- Przepisać równanie Diraca jako układ równań spełnianych przez funkcje  $f(r)$  i  $g(r)$  przy ustalonych wartościach liczb kwantowych  $j, m, l, l' = 2j - l$ .
- Zbadać zachowanie asymptotyczne przy  $r \rightarrow \infty$ . Podać warunek stanu związanego. Pokazać, że w tej granicy  $f(r)$  i  $g(r)$  powinny zachowywać się jak  $e^{-kr}$ . Obliczyć  $k$ . Zbadać zachowanie asymptotyczne przy  $r \rightarrow 0$  (zachowanie  $\propto r^\alpha$ ).
- Znaleźć postać równania zredukowanego (przy eliminacji zachowania asymptotycznego dla  $r \rightarrow \infty$ ) dla funkcji  $F(r)$  i  $G(r)$  (gdzie  $f(r) = F(r)e^{-kr}$ , podobnie  $G(r)$ ).
- Znaleźć wzór rekurencyjny na współczynniki rozwinięcia potęgowego

$$F(r) = \sum_n f_n r^{n+\alpha} \text{ i } G(r) = \sum_n g_n r^{n+\alpha}$$

w postaci dwukomponentowego równania macierzowego

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

Znaleźć wartości własne  $A_n$ , i pokazać, że równanie pozwala wyznaczyć spektrum stanów związanych.