Mechanika kwantowa III, zestaw 7

Zad. 1. Przypomnienie własności macierzy Pauliego $\sigma_i,\ i = 1, 2, 3$:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Zad. 2. Startując z równania Diraca w postaci

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(-ic\hbar(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}) + \beta mc^2 + V(r)\right)\Psi$$

pokazać, że:

a) Równanie można interpretować, jako opisujące oddziaływanie z polem elektromagnetycznym ($\partial_\mu \to D_\mu$) dla przypadku $\vec{A}(x) = 0,\ V(r) = eA_0(r)$

b) Pokazać, że równanie nie zmienia formy dla transformacji $\vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x}$ oraz $\Psi(\vec{r}, t) \to \beta\Psi(-\vec{r}, t)$.

c) Przepisać równanie jako równanie na stany stacjonarne i pokazać, że hamiltonian komutuje z operatorami obrotu w postaci $J_i = L_i + S_i$, gdzie

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\Sigma_i, \quad \Sigma_i = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_i & 0 \\ \hline 0 & \sigma_i \end{array}\right)$$

d) Używając operatorów $2\times 2:\ j_i = L_i + \hbar\sigma_i/2$ zbudować stany własne operatorów $\vec{j}^2,\ \vec{L}^2,\ j_3$ w postaci

$$\Omega_{jlm} = \begin{pmatrix} \alpha_1 Y_{lm-1/2}(\theta,\phi) \\ \alpha_2 Y_{lm+1/2}(\theta,\phi) \end{pmatrix}$$

znaleźć wartości α_1 i α_2. Jaka jest wartość własna operatora j_3?

e) Znaleźć postać równania Diraca dla parametryzacji

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\begin{pmatrix} f(r)\Omega_{jlm} \\ g(r)\Omega_{jl'm} \end{pmatrix}$$

gdzie $l' = 2j - l$ i wyprowadzić układ równań na $f(r)$ i $g(r)$.