Mechanika kwantowa III, zestaw 6

Zad. 1. Dla zespolonego pola Kleina-Gordona znaleźć postać operatora, odpowiadającego zachowanemu "ładunkowi"

$$Q_{KG} =: i\hbar \int d^3x \left(\phi_H^\dagger(\vec{x},t)(\partial_t \phi_H(\vec{x},t)) - (\partial_t \phi_H^\dagger(\vec{x},t))\phi_H(\vec{x},t)\right) :$$

Sprawdzić rolę uporządkowania normalnego w tym wyrażeniu.
Sprawdzić jak wyraża się operator "gęstości prawdopodobieństwa" dla nierelatywistycznego przypadku

$$Q =: \int d^3x \Psi_H^\dagger \Psi :$$

Zad. 2. Rozważamy zespolone pole Kleina-Gordona oddziałujące z zewnętrznym zespolonym prądem $j(x)$ takim, że

$$\lim_{t\to\pm\infty} j(x) = 0.$$

Lagranżian układu ma gęstość

$$L = \hbar^2 c^2 g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi^*)(\partial_\nu \phi) - m^2 c^4 \phi^* \phi - j\phi - j^* \phi^*.$$

a) Wyprowadzić klasyczne równania Eulera-Lagrange'a.

b) Znaleźć pędy kanonicznie sprzężone i zbudować hamiltonian.

c) Sformułować problem ewolucji układu od $t \to -\infty$ do $t \to \infty$ w obrazie oddziaływania (Tomonagi) i obliczyć rozwinięcie perturbacyjne do wyrazów czwartego rzędu w prądach j.

Zad. 3. Rozważamy zespolone pole Kleina-Gordona oddziałujące z zewnętrznym rzeczywistym polem $W(x)$ takim, że

$$\lim_{t\to\pm\infty} W(x) = 0.$$

Lagranżian układu ma gęstość

$$L = \hbar^2 c^2 g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi^*)(\partial_\nu \phi) - m^2 c^4 \phi^* \phi - g\phi^* W \phi,$$

gdzie g jest "stałą sprzężenia".

a) Wyprowadzić klasyczne równania Eulera-Lagrange'a.

b) Znaleźć pędy kanonicznie sprzężone i zbudować hamiltonian. Przeprowadzić kwantowanie przyjmując postać oddziaływania $-g : \phi^* W \phi :$.

c) Sformułować problem ewolucji układu od $t \to -\infty$ do $t \to \infty$ w obrazie oddziaływania (Tomonagi) i obliczyć rozwinięcie perturbacyjne do wyrazów rzędu g^3.

Zad. 4. Rozważamy zespolone pole Kleina-Gordona oddziałujące z rzeczywistym polem skalarnym $W(x)$. Lagranżian układu ma gęstość

$$L = \hbar^2 c^2 g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi^*)(\partial_\nu \phi) - m^2 c^4 \phi^* \phi + \frac{\hbar^2 c^2}{2} g^{\mu\nu}(\partial_\mu W)(\partial_\nu W) - \frac{M^2 c^4}{2} W^2 - g\phi^* W \phi,$$

gdzie g jest "stałą sprzężenia".

a) Wyprowadzić klasyczne równania Eulera-Lagrange'a dla pól ϕ, ϕ^* i W.

b) Znaleźć pędy kanonicznie sprzężone i zbudować hamiltonian. Przeprowadzić kwantowanie przyjmując postać oddziaływania $-g : \phi^* W \phi :$.

c) Sformułować problem ewolucji układu od $t \to -\infty$ do $t \to \infty$ w obrazie oddziaływania (Tomonagi) i obliczyć rozwinięcie perturbacyjne do wyrazów rzędu g^2.