Mechanika kwantowa III, zestaw 5

Zad. 1. Pokazać, że startując z gęstości Lagranżianu w postaci

$$L = \hbar^2 c^2 g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi^*)(\partial_\nu \phi) - m^2 c^4 \phi^* \phi$$

otrzymamy równanie Kleina-Gordona dla pól ϕ i ϕ^*. Przeliczyć kwantowanie w przypadku cząstki w pudle z periodycznymi warunkami brzegowymi. Wskazówka: przedstawić pole

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{p}(\vec{n})} \frac{1}{\sqrt{V}} \tilde{\phi}_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}.$$

Zad. 2. Pokazać, że zakładając, że ϕ jest rzeczywistym polem otrzymamy dla ϕ równanie Kleina-Gordona startując z gęstości Lagranżianu

$$L = \frac{\hbar^2 c^2}{2} g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{m^2 c^4}{2} \phi^2$$

Powtórzyć dyskusję z zadania 1, skorzystać z faktu, że dla pola rzeczywistego

$$\tilde{\phi}_{-\vec{p}}(t) = \tilde{\phi}^*_{\vec{p}}(t).$$

Wskazówka: rozważyć wspólnie mody $\tilde{\phi}_{-\vec{p}}$ i $\tilde{\phi}_{\vec{p}}$.

Zad. 3. Ćwiczenie na uporządkowanie normalne operatorów kreacji i anihilacji. Dla operatorów bozonowych $a,\ a^\dagger,\ [a, a^\dagger] = 1$ pokazać, że

$$e^{\lambda a^\dagger a} =: e^{(e^\lambda - 1)a^\dagger a} :$$

Wskazówka: sprawdzić działanie operatorów na stany $|n\rangle$.

Zad. 4. Dla operatorów $\Phi_S(\vec{x}_i)$ i $\Phi_S^\dagger(\vec{x}_i)$ zespolonego pola skalarnego w reprezentacji Schrödingera obliczyć komutatory:

$$[\Phi_S(\vec{x}_i), \Phi_S(\vec{x}_j)], \quad [\Phi_S(\vec{x}_i), \Phi_S^\dagger(\vec{x}_j)].$$

Obliczyć elementy macierzowe

$$\langle 0|\Phi_S(\vec{x}_i), \Phi_S^\dagger(\vec{x}_j)|0\rangle, \quad \langle 0|\Phi_S^\dagger(\vec{x}_i), \Phi_S(\vec{x}_j)|0\rangle.$$

Zad. 5. Dla operatorów $\Phi_H(x_i)$ i $\Phi_H^\dagger(x_i)$ zespolonego pola skalarnego w reprezentacji Heisenberga obliczyć

a)

$$T\left(\Phi_H(x_i)\Phi_H^\dagger(x_j)\right) - :\Phi_H(x_i)\Phi_H^\dagger(x_j):$$

b)

$$T\left(\Phi_H(x_i)\Phi_H(x_j)\right) - :\Phi_H(x_i)\Phi_H(x_j):$$

We wzorach x_i oznacza czterowektor położenia.

Zad. 6. Dla operatorów $\Phi_S(\vec{x}_i)$ rzeczywistego pola skalarnego w reprezentacji Schrödingera obliczyć komutatory:

$$[\Phi_S(\vec{x}_i), \Phi_S(\vec{x}_j)].$$

Obliczyć elementy macierzowe

$$\langle 0|\Phi_S(\vec{x}_i), \Phi_S(\vec{x}_j)|0\rangle.$$

Zad. 7. Dla operatorów $\Phi_H(x_i)$ rzeczywistego pola skalarnego w reprezentacji Heisenberga obliczyć

$$T\left(\Phi_H(x_i)\Phi_H(x_j)\right) - :\Phi_H(x_i)\Phi_H(x_j):$$