Mechanika kwantowa III, zestaw 4

Zad. 1. Rozważamy szczególne rozwiązania równania Kleina-Gordona

$$(\hbar^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2c^2)\Psi(\vec{x};t) = 0,$$

w postaci

$$\Psi^{\pm}_{\vec{p}}(\vec{x};t) = e^{\mp\frac{i}{\hbar}E_p t + \frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}}, \quad E_p = +\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}.$$

Sprawdzić jak unormowane są takie stany, czyli obliczyć

$$\int d^3x i\hbar \left(\Psi^{\pm}_{\vec{q}}{}^*(\vec{x};t)(\partial_t \Psi^{\pm}_{\vec{p}}(\vec{x};t)) - (\partial_t \Psi^{\pm}_{\vec{q}}{}^*(\vec{x};t))\Psi^{\pm}_{\vec{p}}(\vec{x};t)\right).$$

a) Jak taka normalizacja transformuje się przy właściwych transformacjach Lorentza?

b) Jak transformują się elementy całkowania: d^3p, $d^3p/(2E_p)$?

Zad. 2. Wprowadzamy oddziaływanie do równania K-G w postaci:

$$(\hbar^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2c^2 + W(\vec{x},t))\Psi(\vec{x};t) = 0,$$

gdzie $W(\vec{x},t)$ jest zadaną funkcją. Przyjmijmy szczególną postać tej funkcji

$$W(\vec{x};t) = -\frac{C}{r}$$

czyli niezależną od czasu i sferycznie symetryczną, z pewną stałą C. Szukamy szczególnych rozwiązań równania w postaci

$$\Psi_E(\vec{x};t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\Phi_E(\vec{x}).$$

a) Sprawdzić czy istnieją stany związane ($\Phi_E(\vec{x})$ znika w nieskończoności). Dla jakich C? Czy energia może być ujemna dla stanów związanych?

b) Znaleźć widmo stanów związanych. Jak energia takich stanów ma się do energii spoczynkowej cząstki swobodnej (mc^2)?

c) Sprawdzić czy istnieją ograniczenia na C?

d) Sprawdzić jak rozwiązania transformują się ze względu na symetrie **C**, **P** i **T**.

Skorzystać z analogii z nierelatywistycznym równaniem dla atomu wodoru.

Zad. 3. Wprowadzamy oddziaływanie elektromagnetyczne z zewnętrznym polem $A_\mu(\vec{x}, t)$ poprzez zdefiniowanie "pochodnej kowariantnej"

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu,$$

gdzie e jest"ładunkiem" pola. Zmodyfikowane równanie K-G ma postać

$$(\hbar^2 g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + m^2 c^2)\Psi(\vec{x}; t) = 0.$$

Pokazać, że równanie jest niezmiennicze ze względu na lokalną transformację cechowania

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi(\vec{x}, t)} \psi'(\vec{x}, t),$$
$$A_\mu(\vec{x}, t) = A'_\mu(\vec{x}, t) - \partial_\mu \chi(\vec{x}, t).$$

Jak transformuje się równanie spełnione przez sprzężoną funkcję $\Psi^*(\vec{x}, t)$?

Zad. 4. Rozważamy równanie z zadania 3 dla pola, które w pewnym cechowaniu ma postać:

$$A_0 = -\frac{Ze}{r}, \quad A_i = 0.$$

Analogicznie jak dla zadania 2 szukamy rozwiązań szczególnych

$$\Psi_E(\vec{x}; t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \Phi_E(\vec{x}).$$

Znaleźć widmo stanów związanych.

a) Czy istnieją stany związane z energią dodatnią i ujemną? Jak to zależy od znaku Z?

b) Sprawdzić czy istnieją ograniczenia na Z?

c) Sprawdzić jak rozwiązania transformują się ze względu na symetrie **C**, **P** i **T**.