Mechanika kwantowa III, zestaw 3

Zad. 1. Przypomnienie wyprowadzenia równań Eulera-Lagrange'a. Działanie S dane jest wyrażeniem

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

gdzie Lagranżian L

$$L = \int d^3x \mathcal{L}\left(\Psi_\sigma(\vec{x},t), \frac{\partial \Psi_\sigma(\vec{x},t)}{\partial x^\mu}\right), \quad \mu = 0, , 1, 2, 3.$$

$\mathcal{L}$ jest gęstością Lagranżianu, a σ numeruje "pola".
Pokazać, że z zasady wariacyjnej $\delta S = 0$ przy warunkach $\delta\Psi_\sigma(\vec{x},t_1) = \delta\Psi_\sigma(\vec{x},t_2) = 0$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\sigma(\vec{x},t))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma(\vec{x},t)} = 0.$$

Jak wyglądają te równania jeśli wyrazić x^0 przez czas t i przestrzenne współrzędne $\vec{x}$?
Zakładamy, że pola Ψ_σ znikają dostatecznie szybko, gdy $\vec{x} \to \infty$.

Zad. 2. Pokazać, że zakładając gęstość Lagranżianu w postaci

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_i \Psi^*(\vec{x},t)\right)\left(\partial_i \Psi(\vec{x},t)\right) - \Psi^* V(\vec{x})\Psi + \frac{i\hbar}{2}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\Psi\right)$$

i przyjmując pola Ψ i Ψ^* jako niezależne otrzymamy równania E-L w postaci jednocząstkowego równania Schródingera.
Sprawdzić, że identyczne równania otrzymamy zastępując wyraz z pochodnymi czasowymi przez:

$$\text{a) } i\hbar\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right), \quad \text{b) } -i\hbar\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\Psi\right).$$

Dlaczego?

Zad. 3. Znaleźć postać Lagranżianu L dla poprzedniego zadania, przyjmując postać $\mathcal{L}$ w wersji a). Przedstawić L, rozwijając pola $\Psi(\vec{x},t)$ i $\Psi^*(\vec{x},t)$

w szeregi funkcji własnych $\phi_n(\vec{x})$ (i odposiednio $\phi_n^*(\vec{x})$) jednocząstkowego hamiltonianu:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_x + V(\vec{x})\right)\phi_n(\vec{x}) = E_n\phi_n(\vec{x})$$

$$\Psi(\vec{x},t) = \sum_n c_n(t)\phi_n(\vec{x})$$

$$\Psi^*(\vec{x},t) = \sum_n c_n^*(t)\phi_n^*(\vec{x}).$$

W dalszym ciągu traktujemy $c_n(t)$ i $c_n^*(t)$ jako niezależne.
Jak wyglądają równania E-L w tych zmiennych?

Zad. 4. Traktując $c_n(t)$ jako współrzędne w Lagranżianie z mechaniki klasycznej, znaleźć pędy $p_n(t)$ kanonicznie sprzężone do c_n. Znaleźć postać Hamiltonianu H.
Powtórzyć obliczenia z zadania 3 i 4 dla wersji b) Lagranżianu.

Zad. 5. Przeprowadzić kanoniczne kwantowaniu układu w obrazie Schrödingera. Zastąpić $c_n(t)$ i $p_n(t)$ przez niezależne od czasu operatory $\hat{c}_n$ i $\hat{p}_n$ spełniające reguły komutacji

$$[\hat{c}_n, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{nk}.$$

Pokazać, że wyrażając operator $\hat{p}_n$ przez $\hat{c}_n^\dagger$, (gdzie $c_n^*(t) \to \hat{c}_n^\dagger$), możemy utożsamić $\hat{c}_n \to a_n$, $\hat{c}_n^\dagger \to a_n^\dagger$.

Zad. 6. Przeprowadzić tą samą dyskusję dla przypadku swobodnej cząstki w sześciennym pudle o krawędzi l z periodycznymi warunkami brzegowymi. Przedyskutować przejście $l \to \infty$.