# Mechanika kwantowa III, zestaw 2

**Zad. 1.** Zakładamy, że nierelatywistyczny jednocząstkowy hamiltonian $H$ posiada dyskretne stany własne $|n\rangle$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle.$$

Układ $N$ nieoddziałujących nierozróżnialnych cząstek tego typu opisany jest hamiltonianem $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} H_j,$$

gdzie $H_j$ jest hamiltonianem dla $j$-tej cząstki. Stany własne $\mathcal{H}$ w przestrzeni Focka mają postać $|N_1, N_2, \dots N_k, \dots\rangle$, gdzie $N_k = 0, 1, \dots$ oznacza liczbę cząstek w stanie $k$. Stan próżni $|0\rangle \equiv |0, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$ jest zdefiniowany jako stan bez cząstek ($\langle 0|0\rangle = 1$).
Stan jednocząstkowy w stanie $|n\rangle \equiv |0, 0, \dots, 1_n, 0 \dots\rangle$ można otrzymać działając operatorem kreacji $a_n^\dagger|0\rangle$. Definiujemy sprzężone do nich operatoru anihilacji $a_n$ zakładając, że

$$a_n|0\rangle = 0.$$

Operatory kreacji i anihilacji stanów jednocząstkowych spełniają relacje:

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad \text{dla bozonów,}$$

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0, \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \text{dla fermionów.}$$

a. Jak skonstruować dowolny stan $|N_1, N_2, \dots N_k, \dots\rangle$ działając operatorami kreacji na stan próżni (bozony i fermiony, w tym przypadku jakie mogą być $N_i$?). Stan powinien być znormalizowany do jedności.

b. Pokazać, że (bozony i fermiony)

$$\mathcal{H} = \sum_k E_k a_k^\dagger a_k.$$

c. Powyższe definicje odnoszą się do reprezentacji Schrödingera, gdzie stany układu zależą od czasu i spełniają równanie Schrödingera. W reprezentacji Heisenberga stany układu nie zależą od czasu, ale operatory zależą. Znaleźć postać operatorów kreacji i anihilacji w reprezentacji Heisenberga.

**Zad. 2.** Funkcja falowa jednocząstkowego stanu własnego $|n\rangle$ jest zdefiniowana jako

$$\Psi_n(\vec{x}) = \langle \vec{x}|n\rangle.$$

W reprezentacji Schrödingera definiujemy operator pola

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_n \Psi_n(\vec{x}) a_n.$$

a. Pokazać, że

$$\Psi_n(\vec{x}) = \langle 0|\Phi(\vec{x})|0, 0, \ldots, 1_n, 0, \ldots\rangle = \langle 0|\Phi(\vec{x}) a_n^\dagger|0\rangle.$$

b. Operator sprzężony do $\Phi(\vec{x})$

$$\Phi^\dagger(\vec{x}) = \sum_n \Psi_n^*(\vec{x}) a_n^\dagger.$$

Operator ten działając na stan próżni generuje jednocząstkowy stan $|\vec{x}\rangle$ zlokalizowany w punkcie $\vec{x}$. Pokazać, że

$$\text{dla bozonów} \quad [\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{x}')] = 0, \quad [\Phi(\vec{x}), \Phi^\dagger(\vec{x}')] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$\text{dla fermionów} \quad \{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{x}')\} = 0, \quad \{\Phi(\vec{x}), \Phi^\dagger(\vec{x}')\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

c. Pokazać, że w obu przypadkach zachodzi $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$.

d. Zakładając, że jednocząstkowy operator Hamiltona w reprezentacji położeń ma postać

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle_x + V(\vec{x})$$

pokazać, że

$$\mathcal{H} = \int d^3x \Phi^\dagger(\vec{x}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle_x + V(\vec{x}) \right) \Phi(\vec{x}).$$

e. Pokazać, że operator $\Phi_H(\vec{x;t})$ spełnia równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Phi_H(\vec{x;t}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle_x + V(\vec{x}) \right) \Phi_H(\vec{x;t}).$$

**Zad. 3.** Znaleźć postać funkcji dwucząstkowej (bozony i fermiony).

$$\Psi_{n_1,n_2}(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \langle 0 | \Phi(\vec{x_1}) \Phi(\vec{x_2}) a^\dagger_{n_1} a^\dagger_{n_2} | 0 \rangle.$$

Sprawdzic normalizację.

**Zad. 4.** Znaleźć postać operatora $\Phi_H(\vec{x;t})$ - w reprezentacji Heisenberga.

**Zad. 5.** Szczególny przypadek: układ cząstek swobodnych w sześciennym pudle o krawędzi $L$ (zakładamy periodyczne warunki brzegowe). Znaleźć (wypisać postać operatora $\Phi(\vec{x})$ w tym przypadku. Zbadać sensowność granicy $L \to \infty$. Jak zdefiniować jednocząstkowe operatory kreacji i anihilacji i ich reguły (anty)komutacji?