Mechanika kwantowa III, zestaw 1

Zad. 1. Rozważamy dowolną nieosobliwą transformację liniową współrzędnych

$$x'^{\mu} = A^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu} x^{\nu}$$

o stałych współczynnikach $A^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu}$. Korzystając z własności

$$A^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu} A^{\cdot\,\nu}_{\rho\,\cdot} = \delta^{\mu}_{\rho}, \quad A^{\cdot\,\nu}_{\mu\,\cdot} A^{\rho\,\cdot}_{\cdot\,\nu} = \delta^{\rho}_{\mu}$$

pokazać, że:

a. $c = a_{\mu} b^{\mu}$ - transformuje się jak skalar.

b. $b_{\nu} = a^{\mu} t_{\mu\nu}$ - transformuje się ak wektor kowariantny ($t_{\mu\nu}$ - kowariantny tensor dwuwskaźnikowy).

c. $p_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ - transformuje się jak wektor kowariantny.

d. $a_{\mu} b_{\nu} g^{\mu\nu}$ - transformuje się jak skalar ($g^{\mu\nu}$ - kontrawariantny tensor dwuwskaźnikowy).

Zad. 2. Grupa transformacji Lorentza $L^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ zachowuje formę "tensora metrycznego" $g^{\mu\nu}$. W zapisie macierzowym $g^{\mu\nu} \to G = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$,. Przypisując macierz kwadratową transformacji L pokazać, że zachodzi

$$G = L \cdot G \cdot L^{T}.$$

Kowariantny tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ spełnia $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\mu}$. Pokazać, że

$$L^{\cdot\,\nu}_{\mu\,\cdot} = g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} L^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$$

$$L_{\mu\nu} L^{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\mu}.$$

Zad. 3. Infinitezymalne transformacje Lorentza mają postać

$$L(\omega)^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu}.$$

Infinitezymalne - oznacza, że mnożąc takie macierze możemy zaniedbać wyrazy kwadratowe w ω. Pokazać, że macierz $\omega_{\mu\nu}$ jest antysymetryczna. W konsekwencji jest ona zdefiniowana przez 6 rzeczywistych parametrów. Rozważyć 6 przypadków, odpowiadających sytuacji, gdy jeden z parametrów jest różny od zera, a pozostałych 5 jest zero. Znaleźć 6 generatorów transformacji $K^{(\alpha\beta)}$ zdefiniowanych przez

$$L_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}K^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu}.$$

Dlaczego jest ich tylko 6? Znaleźć algebrę tych operatorów (wszystkie komutatory).

Zad. 4. Zbudować transformacje odpowiadające skończonej wartości Ω dla każdej z sześciu elementarnych transformacji z zadania 3. Konstrukcja oparta jest na złożeniu N identycznych transformacji o $\omega = \Omega/N$ i skorzystaniu z tożsamości

$$\lim_{N\to\infty}(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{x}}{N})^N = \exp(\mathbf{x}),$$

(eksponenta z macierzy to suma szeregu potęgowego, definiującego eksponentę).