Zestaw 7.

1. Znaleźć wartości własne macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Dla każdej wartości własnej λ znaleźć odpowiadający jej wektor własny.

2. Zapisać układ równań

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   w postaci

$$(A - \lambda\mathbf{1})x = 0, \tag{2}$$

   gdzie A jest macierzą współczynników, $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ wektorem a λ pewnym parametrem.

   i) Znaleźć wartości własne λ.
   ii) Policzyć jądro macierzy $(A - \lambda\mathbf{1})$ (tj. wektory własne) i jego wymiar (tj. liczbę liniowo niezależnych wektorów własnych) dla każdej z wyliczonych wartości własnych.
   iii) Policzyć rząd macierzy $(A-\lambda\mathbf{1})$ dla każdej z wyliczonych wartości własnych. Czy są jakieś zbieżności wymiaru stosownego jądra i rzędu tej macierzy?
   iv) Czy przepis podany na wykładzie na konstrukcję diagonalnej macierzy $\tilde{A}$ podobnej do A działa w rozważanym przypadku? Jeśli nie, to dlaczego?