Sprawdzian 2 - przykładowe zadania

1. (4 punkty) Rozwiązać poniższy układ równań

$$x + y + z = 3,$$

$$2x + y - z = 2,$$

$$-x + y + z = 1.$$

2. (2 punkty) Jakie będą rozwiązania x, y, z gdy przyjmiemy kolumnę wyrazów wolnych $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zamiast $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

3. (4 punkty) Niech

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sprawdzić, że te wektory są liniowo niezależne.

4. (4 punkty) Pokazać, wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego, że poniższy układ równań nie ma rozwiązań dla parametru $\lambda \neq 0$:

$$x - y + z = 4$$

$$x + y + z = 2 + \lambda$$

$$x - 3y + z = 6.$$

5. (8 punktów) Zapisać układ równań

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

w postaci

$$(A - \lambda\mathbf{1})x = 0, \tag{2}$$

gdzie A jest macierzą współczynników,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

wektorem a λ pewnym parametrem.

i) Znaleźć wartości własne λ.

ii) Policzyć jądro macierzy $(A - \lambda\mathbf{1})$ (tj. wektory własne) i jego wymiar (tj. liczbę liniowo niezależnych wektorów własnych) dla każdej z wyliczonych wartości własnych.

iii) Policzyć rząd macierzy $(A-\lambda\mathbf{1})$ dla każdej z wyliczonych wartości własnych. Czy są jakieś zbieżności wymiaru stosownego jądra i rzędu tej macierzy?

6. (4 punkty) Niech przestrzeń wektorowa V oznacza zbiór wszystkich kombinacji liniowych funkcji $\sin\phi, \cos\phi$. Niech $A = \frac{d}{d\phi}$.

   i) Pokazać, że A jest operatorem liniowym w V.

   ii) Wybrać wektory $\hat{e}_1 = \sin\phi$, $\hat{e}_2 = \cos\phi$. Pokazać, że stanowią one bazę w V.

   iii) Policzyć macierz operatora A w tej bazie.

7. (8 punktów) Policzyć A^{596}, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Zdobycie co najmniej 16 punktów gwarantuje ocenę dostateczną.