Statystyka nieoddziaływujących gazów Bosego i Fermiego

- Bozony: fotony (kwanty pola elektromagnetycznego, których liczba nie jest zachowana – mogą być pojedynczo pochłaniane lub tworzone. W konsekwencji, potencjał chemiczny dla fotonów jest równy zeru, czyli cząstki mogą znikać w próżni!)

  Drgania sieci krystalicznej: Drgania o małych amplitudach mogą być przedstawione jako mody własne (drgania harmoniczne). Kwanty takich modów to fonony
- Bozony o niezerowej masie: wyprowadzenia podstawowych formuł zakładają wówczas zachowanie liczby cząstek. Przy zadanej objętości V i temperaturze T, liczba cząstek, które mogą mieścić się na poziomach energetycznych o energiach zawartych pomiędzy (niezerowa) E_0 i nieskończonością jest ograniczona. Konsekwencje:

  część cząstek (z racji zachowania całkowitej ich liczby) musi obsadzać niskoenergetyczne stany o zerowym pędzie, co prowadzi do zjawiska kondensacji Bosego-Einsteina
- Fermiony: np. gaz elektronów w ciele stałym

$\boxed{\text{Gęstość Stanów}}$ jednocząstkowych

$$\text{"suma"} = \sum_{\{j\}} (...) \exp\left[-\beta E(j)\right]$$

średnia energia układu

$$U \equiv < E > = Z^{-1} \sum_{\{j\}} E(j) \exp[-\beta E(j)]$$

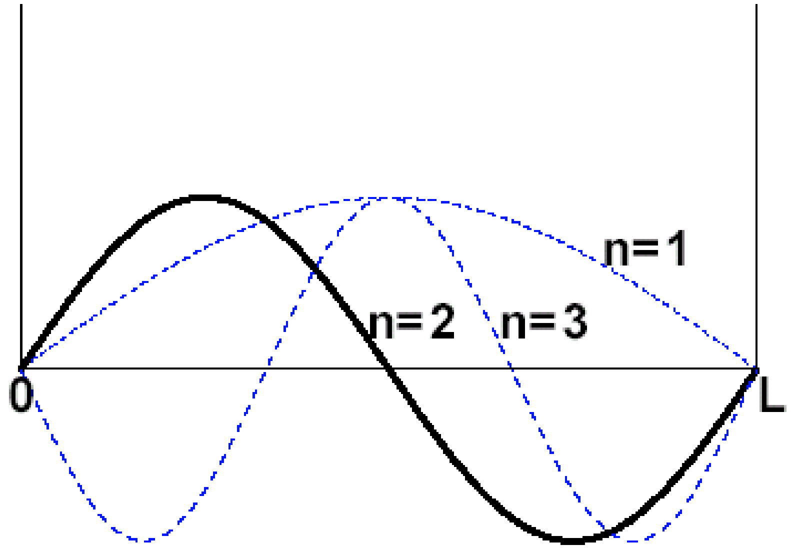
Jeśli poziomy są gęsto położone, tzn. $\beta(E_{j+1} - E_j) \ll 1$

$$\text{"suma"} = \int_{E_{min}}^{\infty} (...) e^{-\beta E} D(E) \mathrm{d}E,$$

D(E) jest gęstością stanów zdefiniowaną w ten sposób, że D(E) dE jest liczbą stanów w przedziale [E, E + dE]

Przykład wyznaczania gęstości stanów:

Układy nieoddziaływujące



Funkcje falowe dla cząstki w jednowymiarowej studni o idealnie sztywnych ściankach

funkcje falowe dla parzystych n :

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{n\pi(L-2x)}{2L}\right)}{\sqrt{L}}$$

funkcje falowe dla nieparzystych n :

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{n\pi(L-2x)}{2L}\right)}{\sqrt{L}}$$

energie własne w obu przypadkach :

$$E(n) = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}$$

i dla układów 3d:

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi}{V^{1/3}}(n_1, n_2, n_3), \qquad n_\alpha > 0.$$

funkcje falowe dla parzystych n :

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{n\pi(L-2x)}{2L}\right)}{\sqrt{L}}$$

funkcje falowe dla nieparzystych

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{n\pi(L-2x)}{2L}\right)}{\sqrt{L}}$$

energie własne w obu przypadkach :

$$E(n) = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2} \quad \text{lub} \quad E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Uwaga: czynnik 1/8 w całce poniżej, ponieważ składowe n przyjmują jedynie wartości dodatnie

$$\mathrm{k} = \frac{\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi}{V^{1/3}}(n_1, n_2, n_3), \qquad n_\alpha > 0.$$

$$\sum_k(\ldots) = \sum_n(\ldots) \rightarrow \int(\ldots)dn = \int(\ldots)\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 dk = \int_0^\infty \frac{V4\pi}{\pi^3 8}k^2 dk\ldots$$

$$\vec{k} = \frac{\pi\vec{n}}{L}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi}{V^{1/3}}(n_1, n_2, n_3), \qquad n_\alpha > 0.$$

Zakładając izotropowy ośrodek otrzymamy dla energii

$$E = E(|\mathbf{k}|) = \hbar\omega(k),$$

gdzie zależność $\omega = \omega(k)$ nazywa się relacją dyspersji

Wtedy $\Omega_0(\omega)$ **:**

$$(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2} \leq V^{1/3}\frac{k(\omega)}{\pi}$$

$$\cong \frac{1}{8} \times \left(\text{objętość kuli o promieniu } V^{1/3}\frac{k(\omega)}{\pi}\right)$$

Stąd

$$\Omega_0(\omega) = \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi\left(V^{1/3}\frac{k(\omega)}{\pi}\right)^3 = \frac{V}{6\pi^2}\,k^3(\omega)$$

Co daje dla gęstości stanów wyrażenie:

$$D(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{\partial\Omega_0(\omega)}{\partial\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{\partial\Omega_0(k)}{\partial k}\,\frac{\partial k(\omega)}{\partial\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{V}{6\pi^2}\,\frac{\mathrm{d}k^3(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}\,k^2\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

$$\boxed{D(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}\,k^2\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}\,k^2\mathrm{d}k.}$$

$$\boxed{D(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}\, k^2 \frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\, \mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}\, k^2 \mathrm{d}k.}$$

.

- **Różne fizyczne modele odpowiadają różnym relacjom dyspersji**

$$\boxed{\omega(k)}$$

- **Transformację gęstości stanów do zmiennych, które w danym momencie są najbardziej użyteczne otrzymamy posługując się ogólnymi relacjami mechaniki kwantowej:**

$$\boxed{\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad k \equiv |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad E = \hbar\omega, \quad \omega = 2\pi\nu}$$

$$\boxed{D(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}k^2\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}k^2\mathrm{d}k.}$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad k \equiv |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad E = \hbar\omega, \quad \omega = 2\pi\nu$$

UWAGA 1: formalnie identyczny wzór otrzymamy gdy w ‘klasycznym’ wyrażeniu

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{h^3}$$

zastąpimy $\mathbf{p}$ przez $\hbar\mathbf{k}$. Wtedy

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{h^3} = \frac{\hbar^3}{h^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}\,\mathrm{d}^3\mathbf{q} = \frac{V}{2\pi^2}\int k^2\mathrm{d}k.$$

UWAGA 2: często całkuje się bezpośrednio po energiach; np. dla nieoddziaływujących cząstek mielibyśmy

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \left(\mathrm{d}E = \frac{\hbar^2 k\,\mathrm{d}k}{m}\right)}$$

$$D(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2}k^2\mathrm{d}k = \frac{V}{2\pi^2}k\frac{m}{\hbar^2}\mathrm{d}E = \frac{2\pi}{h^3}V(2m)^{3/2}E^{1/2}\mathrm{d}E$$

$$= D(E)\,\mathrm{d}E$$

Jeśli dodatkowo występuje degeneracja poziomów, wtedy

$$\boxed{D(E)\mathrm{d}E = 2\pi\sigma V(2m/h^2)^{3/2}E^{1/2}\mathrm{d}E.}$$

$$\boxed{D(E)\mathrm{d}E = 2\pi\sigma V(2m/h^2)^{3/2}E^{1/2}\mathrm{d}E.}$$

Ogólnie, identyczny wynik otrzymamy wychodząc z wzorów klasycznych:

$$\begin{aligned}
\sum_k F(E_k) &= \sigma h^{-3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,F(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}) \\
&= \sigma h^{-3} V 4\pi \int_0^\infty \underbrace{\mathrm{d}p}_{\mathrm{d}E=\frac{p}{m}\mathrm{d}p}\; p^2 F(\underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{E}) \\
&= 2\pi\sigma V(2m/h^2)^{3/2}\int_0^\infty \mathrm{d}E\,E\,E^{1/2}F(E).
\end{aligned}$$

UWAGA 3: Dla rzeczywistych układów D(E) (lub D(ω))
często wyznaczamy eksperymentalnie
(fonony, magnony, etc.)

UWAGA 4: formuły na gęstość stanów

$$\boxed{D(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \mathrm{d}k.}$$

$$\boxed{D(E)\mathrm{d}E = 2\pi\sigma V(2m/h^2)^{3/2} E^{1/2}\mathrm{d}E.}$$

zależą oczywiście od <u>wymiaru przestrzeni</u>

Przypomnijmy nasze wyprowadzenie wielkiego rozkładu kanonicznego…

Rozkład wielki kanoniczny:

$$P(i,N) = e^{-\beta pV}\, e^{-\beta[E(i,N)-\mu N]} = Z^{-1} e^{-\beta[E(i,N)-\mu N]}$$

$$Z = \sum_{\{i,N\}} e^{-\beta[E(i,N)-\mu N]} = \sum_{\{N\}} e^{\beta\mu N} \sum_{\{i\}} e^{-\beta E(i,N)}$$

$$\Xi = -pV = -\beta^{-1}\ln Z$$

+ warunki termalizacji

Jeśli liczba cząstek jest zachowana, wtedy kanonicznej funkcji rozdziału praktycznie nie daje się wyliczyć. Wygodniej jest przejść do dużego zespołu, gdzie ograniczenia na N można usunąć

$$\boxed{Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \sum_{\{n_\tau\}} e^{-\beta \sum_\tau \epsilon_\tau n_\tau}$$

$$E(n_\tau) = n_\tau \varepsilon_\tau$$

$$\boxed{= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_\tau\}} e^{\beta \sum_\tau (\mu - \epsilon_\tau) n_\tau}}$$

Energia podukładu w stanie τ, liczba cząstek n_τ

Energia na cząstkę ε_τ

$$\boxed{= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \ldots e^{\beta \sum_\tau (\mu - \epsilon_\tau) n_\tau} \longleftrightarrow \prod_\tau \left[\sum_{n_\tau} e^{\beta(\mu - \epsilon_\tau) n_\tau} \right]}$$

$$= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\dots e^{\beta\sum_\tau(\mu-\epsilon_\tau)n_\tau} = \prod_\tau\left[\sum_{n_\tau} e^{\beta(\mu-\epsilon_\tau)n_\tau}\right]$$

Z założenia energia stanu podstawowego $\epsilon_0 = 0$

dla bozonów $\mu - \epsilon_\tau \leq 0$, co implikuje że $\mu \leq 0$

$$= \begin{cases} \prod_\tau \dfrac{1}{1-e^{\beta(\mu-\epsilon_\tau)}} & \text{(statystyka Bosego-Einsteina)} \\ \prod_\tau \left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon_\tau)}\right) & \text{(statystyka Fermiego-Diraca).} \end{cases}$$

$$\Xi = -k_BT\ln Z_G = \underset{\substack{\uparrow \\ B.E.}}{\overset{\substack{F.D. \\ \downarrow}}{\mp}} k_BT\sum_\tau \ln\left(1 \pm e^{\beta(\mu-\epsilon_\tau)}\right) = -pV$$

$$
Z_G = \begin{cases} \prod_\tau \dfrac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_\tau)}} & \text{(statystyka Bosego-Einsteina)} \\ \prod_\tau \left(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_\tau)}\right) & \text{(statystyka Fermiego-Diraca).} \end{cases}
$$

$$
P(\{n_\tau\}) = Z_G^{-1} e^{\beta \sum_\tau (\mu - \epsilon_\tau) n_\tau}
$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia stanu o liczbie obsadzenia n_τ

$$
< n_k > \;\; \equiv \;\; \overline{n}_k \equiv n(\epsilon_k) = Z_G^{-1} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \ldots \sum_{n_k} n_k \ldots e^{\beta \sum_\tau (\mu - \epsilon_\tau) n_\tau}
$$

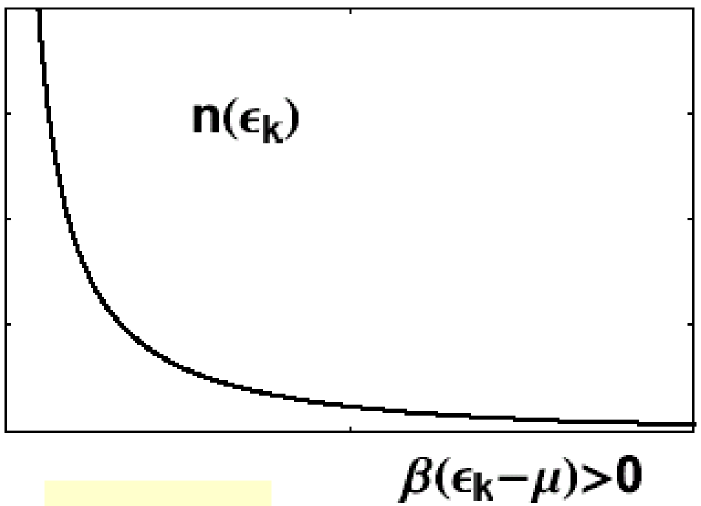
$$
= \;\; \beta^{-1} Z_G^{-1} \frac{\partial}{\partial(\mu - \epsilon_k)} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \ldots e^{\beta \sum_\tau (\mu - \epsilon_\tau) n_\tau}
$$

$$
= \;\; \beta^{-1} Z_G^{-1} \frac{\partial}{\partial(\mu - \epsilon_k)} Z_G = - \frac{\partial}{\partial(\mu - \epsilon_k)} \Xi
$$

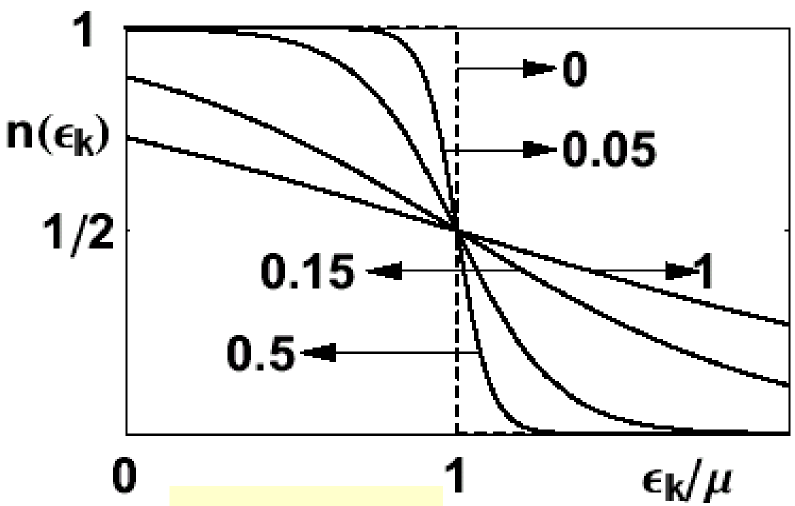
$$< n_k > = -\frac{\partial}{\partial(\mu - \epsilon_k)} \Xi$$

$$\boxed{\Xi = -k_B T \ln Z_G = \overset{F.D.}{\underset{B.E.}{\mp}} k_B T \sum_{\tau} \ln\left(1 \overset{B.E.}{\underset{F.D}{\mp}} e^{\beta(\mu - \epsilon_\tau)}\right) = -pV}$$

$$\boxed{n(\epsilon_k) = \frac{g(\epsilon_k)}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1}.}$$



bozony



fermiony

$$\boxed{pV = \frac{2}{3}E}$$

Nie ma zbyt wielu ścisłych wyników dla nieoddziaływujących bozonów i fermionów. Jednym z nich jest związek pomiędzy ciśnieniem i średnią energią. Udowodnimy, że dla nierelatywistycznych bozonów i fermionów zachodzi powyższy wzór

UWAGA

Wynik powyższy jest konsystentny z równaniami dla klasycznego gazu doskonałego!:

$$pV = Nk_BT, \; E = \tfrac{3}{2}Nk_BT$$

$\boxed{\text{Dowód}}$ $$-\Xi = pV = \pm k_B T \sum_\tau \ln\left(1 \pm e^{\beta(\mu-\epsilon_\tau)}\right)$$

$$D(k)\,\mathrm{d}k = \sigma \int_V \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{h^3} = \frac{V\sigma}{2\pi^2} k^2 \mathrm{d}k \quad \epsilon_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \xi = \exp\left(\mu/k_B T\right)$$

$$= \pm k_B T \int_0^\infty \ln\left(1 \pm \xi e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}\right) \frac{V\sigma}{2\pi^2} k^2 \mathrm{d}k$$

obecnie robimy podstawienie: $k^2 = x$, $2k\mathrm{d}k = \mathrm{d}x$

i całkujemy przez części: $\int f'h = \Big|_a^b (fh) - \int fh'$

$$-\Xi \;=\; pV = \pm k_B T \int_0^\infty \ln\left(1 \pm \xi e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}\right) \frac{V\sigma}{2\pi^2} k^2 \mathrm{d}k$$

$$k^2 = x,\; 2k\mathrm{d}k = \mathrm{d}x \qquad \int f'h = \Big|_a^b (fh) - \int fh'$$

$$= \;\pm \frac{V\sigma k_B T}{2\pi^2} \frac{1}{2} \int_0^\infty \overbrace{\sqrt{x}}^{(\frac{2}{3}x^{3/2})'} \ln\left(1 \pm \xi e^{-\beta \frac{\hbar^2 x}{2m}}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \;\pm \frac{V\sigma k_B T}{2\pi^2} \frac{1}{2} \qquad \underbrace{\int_0^\infty (\frac{2}{3}x^{3/2})' \ln\left(1 \pm \xi e^{-\beta \frac{\hbar^2 x}{2m}}\right) \mathrm{d}x}$$

$$= \pm\frac{V\sigma k_B T}{2\pi^2}\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty (\frac{2}{3}x^{3/2})' \ln\left(1 \pm \xi e^{-\beta\frac{\hbar^2 x}{2m}}\right)\mathrm{d}x}_{\int f'h = \Big|_a^b (fh) - \int fh'}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x^{3/2}) \ln\left(1 \pm \xi e^{-\beta\frac{\hbar^2 x}{2m}}\right) \Big|_{x=0}^{x=\infty} \qquad (\to 0)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty (\frac{2}{3}x^{3/2}) \frac{\pm\xi\left(-\beta\frac{\hbar^2 x}{2m}\right)e^{-\beta\frac{\hbar^2 x}{2m}}}{1\pm\xi e^{-\beta\frac{\hbar^2 x}{2m}}}\mathrm{d}x$$

$$x = k^2,\ \mathrm{d}x = 2k\,\mathrm{d}k)$$

$$= \pm\frac{2}{3}\beta\int \mathrm{d}k\, k^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left[\frac{\xi e^{-\beta\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}}{1\pm\xi e^{-\beta\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}}\right]$$

$$= \pm \frac{V\sigma k_B T}{2\pi^2}\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty (\frac{2}{3}x^{3/2})' \ln\left(1 \pm \xi e^{-\beta\frac{\hbar^2 x}{2m}}\right)\mathrm{d}x}_{\pm\frac{2}{3}\beta \int \mathrm{d}k k^2 \frac{\hbar^2k^2}{2m}\left[\frac{\xi e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}}}{1\pm\xi e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}}}\right]}$$

$$= \frac{2}{3}\underbrace{\frac{\sigma V}{2\pi^2}}_{D(k)\longrightarrow}\int \mathrm{d}k \underbrace{k^2}_{\swarrow} \frac{\hbar^2k^2}{2m}\underbrace{\left[\frac{\xi e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}}}{1\pm\xi e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}}}\right]}_{=1}$$

to wyrażenie łatwo zidentyfikować…

$$n(\epsilon_k) = \frac{g(\epsilon_k)}{e^{\beta(\epsilon_k-\mu)} \pm 1}.$$

$$= \frac{2}{3}\int \mathrm{d}k D(k)\frac{\hbar^2k^2}{2m}n(k) = \frac{2}{3}E$$

$$\boxed{pV = \frac{2}{3}E}$$

Uwaga 1 Wynik powyższy jest konsystentny z równaniami dla klasycznego gazu doskonałego!: $pV = Nk_BT$, $E = \frac{3}{2}Nk_BT$. Jednak w przypadku kwantowym zarówno E jak i p zależą przez potencjał chemiczny w nietrywialny sposób od gęstości i temperatury.

Wykorzystanie rachunku z uzyciem zespołu kanonicznego.

Przykłady trywialne...

Pojedynczy, jednowymiarowy oscylator

$$\boxed{E_n(j) = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega(j).}$$

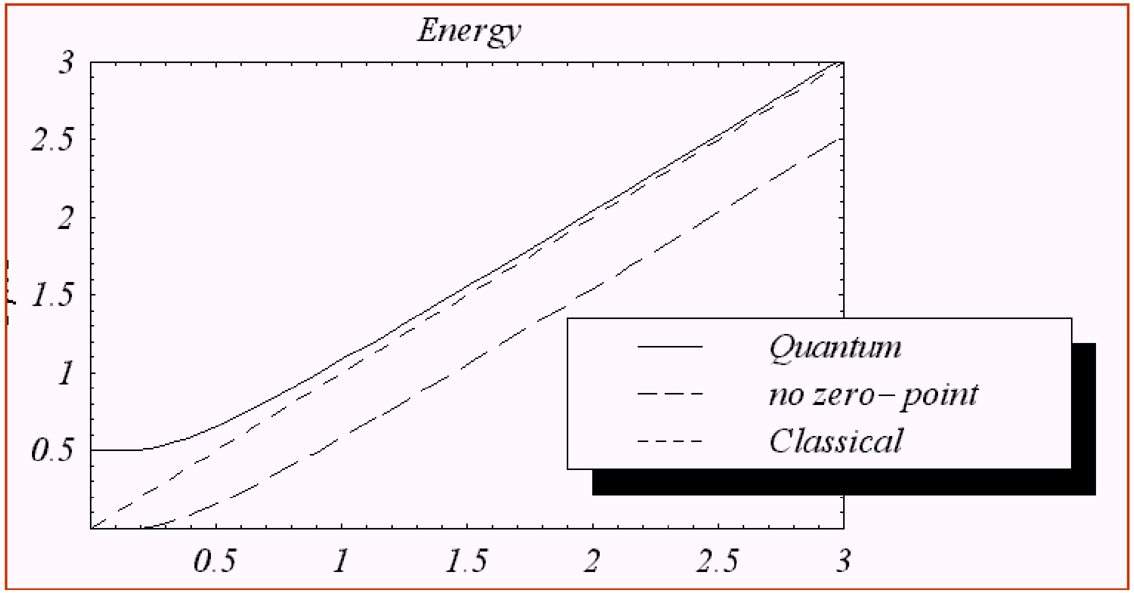
$$\boxed{Z_j = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\hbar\omega(j)\right)}} = e^{-\frac{\beta}{2}\hbar\omega(j)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega(j)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\hbar\omega(j)}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega(j)}} \boxed{= \left[2\sinh\left(\frac{\beta}{2}\hbar\omega(j)\right)\right]^{-1}}$$

$$Z_j = \left[2\,\sinh\left(\frac{\beta}{2}\hbar\omega(j)\right)\right]^{-1} \qquad U = \sum_n Z_j^{-1} E_n(j)\, e^{-\beta E_n(j)}$$

$$= -Z_j^{-1}\frac{\partial}{\partial\beta}\underbrace{\sum_n e^{-\beta E_n(j)}}_{Z_j} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_j = \frac{\frac{1}{2}\,\hbar\omega\cosh\left(\frac{\beta}{2}\,\hbar\omega\right)}{\sinh\left(\frac{\beta}{2}\,\hbar\omega\right)}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} \longrightarrow \begin{cases} k_BT; & T\to\infty \\ \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+e^{-\hbar\omega/k_BT}\right); & T\to 0 \end{cases}$$



Entropię policzymy z wzoru na energię swobodną:

$$F = U - TS$$

$$= \left[2\,\sinh\left(\frac{\beta}{2}\hbar\omega(j)\right)\right]^{-1}$$

$$S = \frac{U-F}{T} = \frac{U + k_B T \ln Z}{T} = \frac{1}{T}\left[-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_j + \beta^{-1}\ln Z_j\right]$$

$$= k_B\left\{\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT}\coth\left(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT}\right) - \ln\left[2\sinh\left(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT}\right)\right]\right\}$$

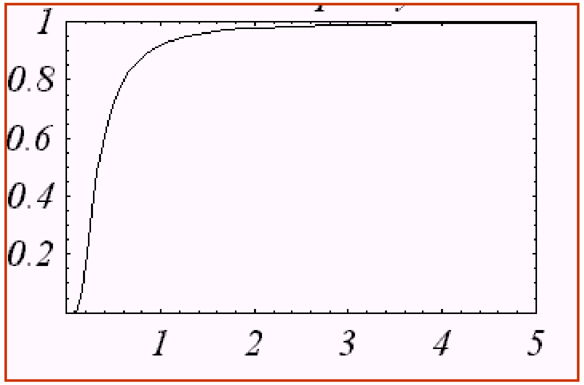
$$\longrightarrow k_B\begin{cases}\dfrac{\hbar\omega_j}{k_BT}e^{-\hbar\omega_j/k_BT}; & T\to 0\\ \ln\left(k_BT/\hbar\omega_j\right); & T\to\infty\end{cases}$$

Mając entropię (bądź energię wewnętrzną)

można wyliczyć ciepło właściwe

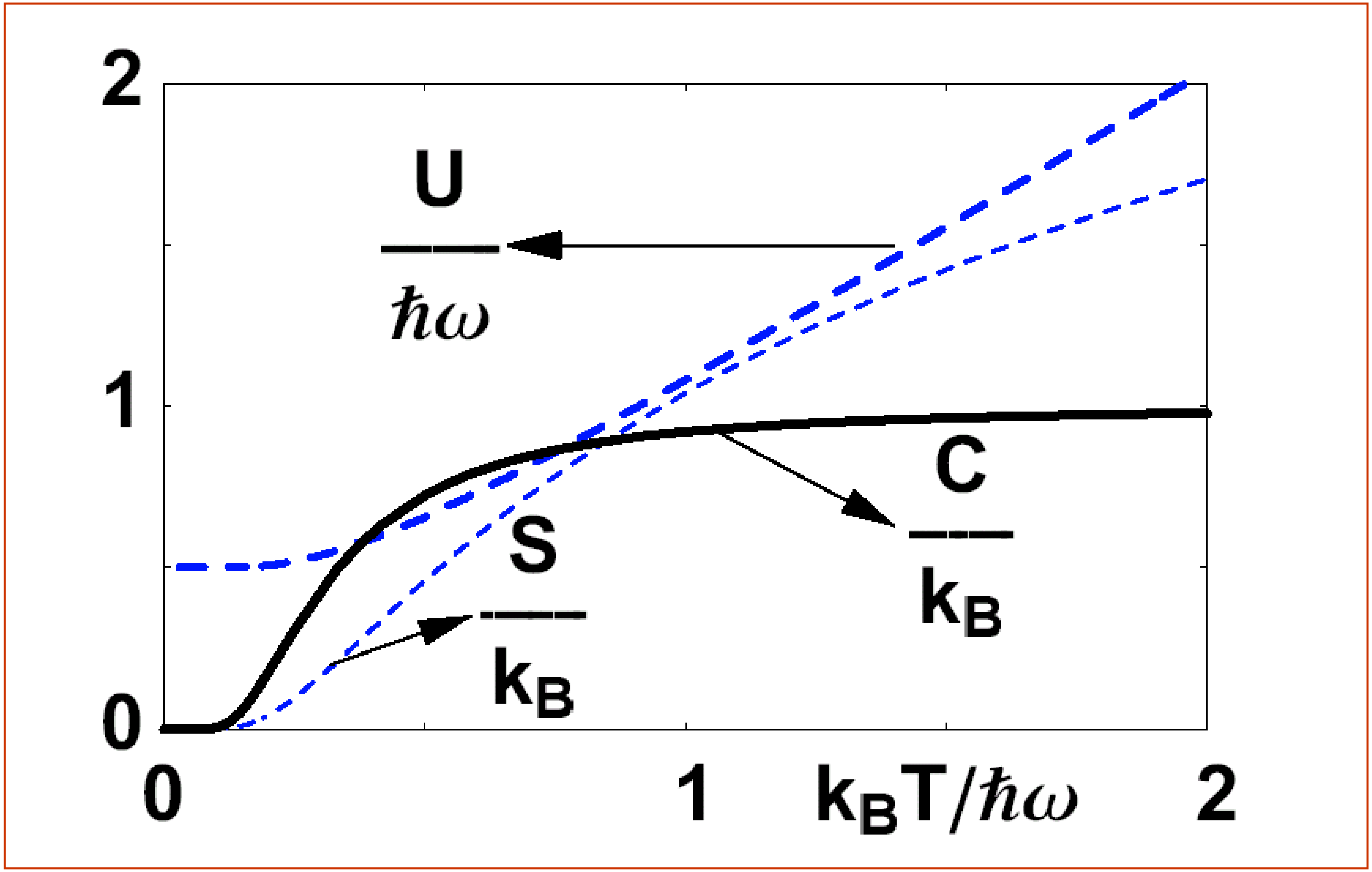
$$= \quad k_B \left\{ \frac{\hbar\omega_j}{2k_BT} \coth\left(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT}\right) - \ln\left[2\sinh\left(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT}\right)\right]\right\}$$

$$C \quad = \quad T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{N,\omega} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,\omega}$$



$$= k_B \frac{e^{\hbar\omega(j)/k_BT}}{\left(e^{\hbar\omega(j)/k_BT} - 1\right)^2} \left(\frac{\hbar\omega(j)}{k_BT}\right)^2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} k_B; & T \longrightarrow \infty \\ k_B\left(\frac{\hbar\omega(j)}{k_BT}\right) e^{-\hbar\omega(j)/k_BT}; & T \longrightarrow 0 \end{cases}$$



2
1
0
0
1
2
U
ħω
S
kB
C
kB
kBT/ħω

Zespół niezależnych oscylatorów kwantowych

$$Z = \prod_j Z_j \qquad \Rightarrow \qquad F = -k_B T \ln Z$$

$$= k_B T \sum_j \ln \left(2 \sinh \frac{\hbar \omega_j}{2 k_B T} \right) .$$

Załóżmy obecnie, że liczba oscylatorów w przedziale częstości $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$

(czyli gęstość stanów) dana jest przez $D(\omega)\,\mathrm{d}\omega$.

$$F(T,V,N) = k_B T \int_0^\infty \ln\left(2\sinh\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) D(\omega)\mathrm{d}\omega$$

U? $F = U - TS = U + T(\partial F/\partial T)_{V,N}\,,$

$$U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)_{V,N}\right]$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\hbar\omega}{2}\coth\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right] D(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_0^\infty \left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\right] D(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

$$\boxed{C = k_B \int_0^\infty \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{\left(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1\right)^2}\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 D(\omega)\mathrm{d}\omega}$$

Zobaczymy, że identyczne wzory można otrzymać dla bezmasowych bozonów

Podsumowanie…

- W naturze istnieją jedynie bozony (fonony,fotony, atomy helu 4, …) i fermiony (elektrony, protony, neutrony)
- Tylko jeden fermion może być w danym stanie kwantowym
- Dowolna ilość bozonów może być w danym stanie kwantowym (kwantowe odpowiedniki ‘fal’ w fizyce klasycznej).
- Wszystkie fundamentalne cząstki w przyrodzie posiadają spin, który jest wielokrotnością $\hbar/2$ Dla nieparzystych wielokrotności $\hbar/2$ mamy fermiony, dla parzystych- bozony.

- Wśród bozonów istnieją bozony z zerową masą spoczynkową (fonony, fotony). Takie bozony mogą być swobodnie kreowane i anihilowane.
- Bozony o niezerowej masie spoczynkowej są zachowywane (np. Atomy helu 4, …). Prowadzi to do nowych zjawisk – kondensacji Bosego-Einsteina.