

$$(11.55) \quad \frac{hc}{ym^p} \approx 10^{39}$$

Czynnik  $hc/ym^p$  jest rzędu

$$(11.54) \quad \bar{M}_0 = \left(\frac{K'}{K}\right)^{3/2} = \left(\frac{64\alpha}{27\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{ym^p}{hc}\right)^{3/2}$$

gdzie

$$(11.53) \quad R = M^{2/3} \sqrt{1 - (M/\bar{M}_0)^{2/3}}$$

lub

$$(11.52) \quad K \left(\frac{M^{4/3}}{R^4} - \frac{M^{2/3}}{R^2}\right) = K' \frac{M^2}{R^4}$$

Powyzszy warunek jest sluszny dla malych gestosci, a wiec dla malych  $M$  i duzych  $R$ .  
c) Jesli zas gaz elektronowy ma tak duza gestosc, ze efekty relatywistyczne staja sie istotne ( $x_F \gg 1$ ), to  $P_0$  jest wyznaczone przez (11.43). Warunek rownowagi przyjmuje postac

$$(11.51) \quad \frac{M^{1/3} R}{K} = \frac{5}{4} \frac{K'}{K}$$

Wnioskujemy wiec, ze przy zwiekszeniu masy gwiadzy jej promien maleje

$$(11.50) \quad K' = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma \left( \frac{8m^p}{9\pi} \right)^2 \left( \frac{m^c}{h} \right)^4$$

gdzie

$$\frac{5}{4} K \frac{M^{5/3}}{R^5} = K' \frac{M^2}{R^4}$$

(11.42), stad rownanie (11.48) dostarcza warunku  
b) Przyjmuemy z kolei, ze gaz elektronowy ma tak mala gestosc, iz mozna stosowac dynamike nierelatywistyczna ( $x_F \ll 1$ ). Cisnienie  $P_0$  jest w owczas wyznaczone przez  
Jednak w bialych karbach taka sytuacja nie realizuje sie

$$(11.49) \quad R = \frac{5}{2} \alpha M \frac{KT}{m^p \gamma}$$

Podstawiajac to wyrazenie do (11.48), otrzymujemy zaleznosc liniowa

$$P_0 = \frac{KT}{3KT} = \frac{v}{8\pi m^p} R^3$$

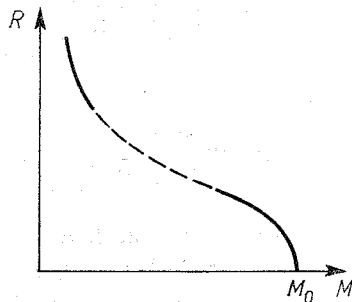
ktorego cisnienie jest rowne

a) Przyjmuemy, ze temperatura gazu elektronowego jest znacznie wyzsza od temperatury Fermiego. Gaz elektronowy mozna wtedy uwazac za doskonaly gaz Boltzmanna, wiadc do (11.48) wyrazenie na  $P_0$ . Rozpatrzmy nastepujace trzy przypadki.  
Rownanie (11.47), scisle rzecz biorac, tylko definiuje  $\alpha$ . Rownanie to uzyskuje tresc fizyczna, jesli zalozye, ze  $\alpha$  jest rzędu jednosci. Wyznaczymy teraz zwiazek pomiedzy  $M$  i  $R$ , wstawiac do (11.48) wyrazenie na  $P_0$ . Rozpatrzmy nastepujace trzy przypadki.

Ten interesujący bezwymiarowy parametr równy jest energii spoczynkowej jakiegokolwiek ciała  $X$  podzielonej przez energię przyciągania się dwóch protonów odległych od siebie o komptonowską długość fali ciała  $X$ . Masa  $M_0$ , odpowiadająca zredukowanej wielkości  $\bar{M}_0$ , równa jest masie Słońca, gdyż (kładziemy  $\alpha \approx 1$ ):

$$M_0 = \frac{8}{9\pi} m_p \bar{M}_0 \approx 10^{33} \text{ g} \approx M_\odot. \quad (11.56)$$

Wzór (11.53) jest słuszny dla dużych gęstości lub dla  $R \rightarrow 0$ . W szczególności jest on słuszny dla  $M$  bliskich  $M_0$ . Nasza teoria przewiduje więc bardzo interesującą właściwość białych karłów, a mianowicie, że nie mogą one mieć masy większej niż  $M_0$ . W przeciwnym bowiem wypadku z (11.53) otrzymalibyśmy urojony promień. Fizyczną przyczyną takiego wyniku jest zbyt mała wartość ciśnienia wtedy, gdy masa jest większa od pewnej wartości. Ciśnienie to, uwarunkowane zasadą Pauliego, nie jest wówczas w stanie zapobiec grawita-



Rys. 11.6. Związek pomiędzy promieniem a masą białego karła

cyjnego zapadaniu się gwiazdy. Związek pomiędzy promieniem a masą białego karła jest w naszym modelu taki jak na rys. 11.6. Na rysunku tym linie ciągłe dotyczą obszarów słuszności wzorów (11.51) i (11.53). Zauważmy, że nie udało się nam wyznaczyć dokładnej wartości  $M_0$ , gdyż nie mogliśmy obliczyć  $\alpha$ . Subtelniejsze rozważania\* dają wynik

$$M_0 = 1,4 M_\odot. \quad (11.57)$$

Masa ta znana jest pod nazwą granicy Chandrasekhara. Zgodnie z naszym modelem gwiazda może się stać białym karłem tylko wtedy, gdy jej masa nie przekracza  $1,4 M_\odot$ . Obserwacje astronomiczne, jak dotąd, potwierdzają ten wniosek. Nie jest znana odpowiedź na pytanie, jak ewoluje gwiazda, jeśli jej masa przewyższa  $1,4 M_\odot$ . Być może takie gwiazdy osiągają swój kres, stając się supernowymi.

### § 11.3. DIAMAGNETYZM LANDAUA

Twierdzenie van Leeuwen\*\* orzeka, że w klasycznej mechanice statystycznej nie występuje zjawisko diamagnetyzmu. Landau\*\*\* pierwszy wykazał, że diamagnetyzm powstaje w wyniku kwantowania orbit naładowanych cząstek w polu magnetycznym.

\* S. Chandrasekhar, *Stellar Structure*, Dover, New York 1957, rozdział XI.

\*\* Zob. zadanie 8.7.

\*\*\* L. Landau, *Z. Phys.*, 64, 629 (1930).

$$T_F \approx 10^{11} \text{ K.}$$

i temperaturze Fermiego wynoszącej

$$e_F \approx \frac{\hbar^2}{1} \frac{2m}{v^{2/3}} \approx 20 \text{ MeV}$$

gdzie symbol  $\odot$  oznacza wartości dotyczące Słońca. Biały karzeł jest więc ogromnie śmiałą bryłą helu o nadzwyczaj wysokiej temperaturze. Temperatura  $10^7 \text{ K}$  odpowiada energii cieplnej wynoszącej  $1000 \text{ eV}$ . Atomy helu powinny więc całkowicie zjonizowane i dlatego taką gwałtowną wiązkę można uważać za gaz złożony z jąder helowych i elektronów. Gaz elektronów można rozpatrywać jako doskonały gaz Fermiego, którego gęstość rzędu  $10^{30}$  elektronów na  $1 \text{ cm}^3$ , co odpowiada energii Fermiego równej

temperatura w środku gwiazdy  $\approx 10^7 \text{ K} \approx T_\odot$ ,

masa  $\approx 10^3 \text{ g} \approx M_\odot$ ,

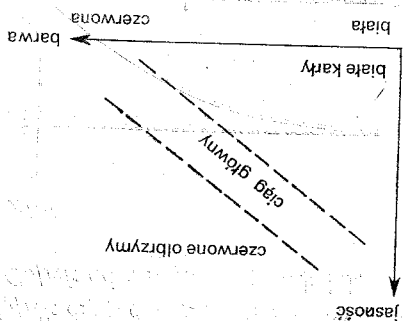
gęstość  $\approx 10^7 \text{ g/cm}^3 \approx 10^7 \rho_\odot$ ,

skład: głównie hel,

stycznych danych dla tego typu gwiazdy. Są nimi:

Wyidealizowany model białego karła można zbudować na podstawie charakterystycznych danych dla tego typu gwiazdy. Są nimi:  
 Wyraźnie porusza się wokół pewnego punktu w pustej przestrzeni.  
 okiem. Jej istnienie przewidywał najpierw Bessel, który próbował wyjaśnić, dlaczego Syriusz odległy o 8 lat świetlnych. Gwiazda ta świeci tak słabo, że nie można jej zobaczyć gołym partner Syriusza, jedna z gwiazd położonych najbliższej Układu Słonecznego. Jest on od kary to gwiazdy, które osiągnęły ostatni etap swej ewolucji. Białym karłem jest na przykład cyjna wyzwalająca się podczas powolnego kurczenia się tych gwiazd. Wydaje się, że białe kary są zbudowane głównie z helu, a źródłem ich słabej jasności jest energia gwiazd. Wynikiem wyczerpania się zasobów wodoru, będącego zasadniczym źródłem energii gwiazd, szczególowa analiza składu tych gwiazd prowadzi do wniosku, że ich nikła jasność

Rys. 11.4. Diagram Hertzsprung-Russella



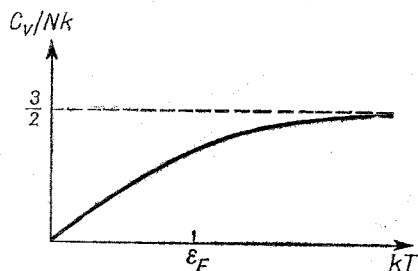
z dobrym przybliżeniem można je uważać za zwyrodniałe gazy Fermiego.

świecące anomalnie słabo. Właśnie białe kary są dla nas bardzo interesujące, ponieważ czerwonej barwy o anomalnie dużej jasności, oraz białe kary, czyli małe białe gwiazdy gwiazdy, które nie spełniają tego prawa. Są nimi czerwone olbrzymy, czyli ogromne gwiazdy pasa, zwanego ciągiem głównym, tak jak to przedstawiono na rys. 11.4. Istnieją jednak

Wzór (11.28) pozwala natychmiast wyznaczyć ciepło właściwe przy stałej objętości:

$$\frac{C_V}{Nk} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{\varepsilon_F}. \quad (11.30)$$

Widzimy, że ciepło właściwe znika liniowo, gdy  $T \rightarrow 0$ , co sprawdza trzecią zasadę termodynamiki. Wiemy już, że  $C_V/Nk$  dąży do  $3/2$ , gdy  $T \rightarrow \infty$ . Powyższe stwierdzenia pozwalają naszkicować zależność  $C_V/Nk$  od temperatury, tak jak to zrobiono na rys. 11.3. Pro-



Rys. 11.3. Ciepło właściwe doskonałego gazu Fermiego

porcjonalność ciepła właściwego w niskich temperaturach do  $T$  można wytłumaczyć w następujący sposób. W temperaturze  $T > 0$  pewna liczba cząstek wzbudzona jest do poziomów energetycznych o  $\varepsilon_p > \varepsilon_F$  i dlatego  $\langle n_p \rangle$  jest inne niż w  $T = 0$ . Można by powiedzieć, że cząstki o energiach rzędu  $kT$  poniżej  $\varepsilon_F$  wzbudzone są do energii rzędu  $kT$  powyżej  $\varepsilon_F$  (zob. rys. 11.2). Liczba wzbudzonych cząstek jest więc rzędu  $(kT/\varepsilon_F)N$ . Stąd całkowita energia wzbudzeń, liczona względem energii stanu podstawowego, wynosi  $\Delta U \approx (kT/\varepsilon_F)NkT$  i dlatego  $C_V \approx (kT/\varepsilon_F)Nk$ .

Na podstawie związków (9.78) i (11.28) wnioskujemy, że równanie stanu ma postać

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V} = \frac{2}{5} \frac{\varepsilon_F}{v} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right]. \quad (11.31)$$

Widzimy, że nawet w temperaturze zera bezwzględne ciśnienie gazu Fermiego nie znika. Gaz ten trzeba więc przetrzymywać w naczyniu o ustalonych ściankach. Jest to wynikiem zakazu Pauliego, zgodnie z którym tylko jedna cząstka może mieć zerowy pęd. Wszystkie pozostałe cząstki mają pęd skończony i dlatego ciśnienie gazu w zerze stopni nie znika.

Aby uzyskać funkcje termodynamiczne dla dowolnych wartości  $\lambda^3/v$ , należy zastosować numeryczne metody obliczania  $f_{3/2}(z)$  i  $f_{5/2}(z)$ .

## § 11.2. TEORIA BIAŁYCH KARLÓW

Znane jest empiryczne prawo, że jasność gwiazdy jest proporcjonalna do barwy gwiazdy (tj. do tej długości fali, która jest najintensywniej wypromieniowywana). Okazuje się przy tym, że współczynnik proporcjonalności jest w przybliżeniu taki sam dla wszystkich gwiazd. Jeśli więc wykreślić zależność jasności od barwy, to uzyskamy diagram Hertzsprunga-Russella, na którym większość gwiazd znajduje się wewnątrz liniowego