

$$T_F \approx 10^{11} \text{ K}$$

i temperaturze Fermiego wynoszącej

$$E_F \approx \frac{h^2}{2m} \frac{1}{v^{2/3}} \approx 20 \text{ MeV}$$

gdzie symbol  $\odot$  oznacza wartości dotyczące Słońca. Biały karzeł jest więc ogromnie ściśniętą bryłą helu o nadzwyczaj wysokiej temperaturze. Temperatura  $10^7 \text{ K}$  odpowiada energii cieplnej wynoszącej  $1000 \text{ eV}$ . Atomy helu powinny więc być całkowicie zjonizowane i dlatego taką gwiazdę można uważać za gaz złożony z jąder helowych i elektronów. Gaz elektronów można rozpatrywać jako doskonały gaz Fermiego, którego gęstość jest rzędu  $10^{30}$  elektronów na  $1 \text{ cm}^3$ , co odpowiada energii Fermiego równej

temperatura w środku gwiazdy  $\approx 10^7 \text{ K} \approx T_{\odot}$ ,

masa  $\approx 10^{33} \text{ g} \approx M_{\odot}$ ,

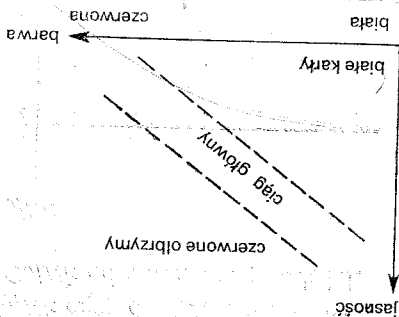
gęstość  $\approx 10^7 \text{ g/cm}^3 \approx 10^7 \rho_{\odot}$ .

skład: głównie hel,

stycznych danych dla tego typu gwiazdy. Są nimi:

Wydzielony model białego karła można zbudować na podstawie charakterystycznych danych dla tego typu gwiazdy. Są nimi: Wyżnie porusza się wokół pewnego punktu w pustej przestrzeni. Jej istnienie przewidział najpierw Bessel, który próbował wyjaśnić, dlaczego Syriusz odległy o 8 lat świetlnych. Gwiazda ta świeci tak słabo, że nie można jej zobaczyć gołym okiem. Biały karzeł, jedna z gwiazd położonych najbliższej Układu Słonecznego. Jest on od nas partnerem Syriusza, które osiągnęły ostatni etap swej ewolucji. Biały karzeł jest na przykład karły to gwiazdy, która podczas powolnego kurczenia się tych gwiazd. Wydaje się, że białe gwiazdy są zbudowane głównie z helu, a źródłem ich słabej jasności jest energia grawitacyjna wyzwalająca się podczas powolnego kurczenia się tych gwiazd. Wynikiem wyczerpania się zasobów wodoru, będącego zasadniczym źródłem energii gwiazd. Szczegółowa analiza składu tych gwiazd prowadzi do wniosku, że ich nikła jasność jest

Rys. 11.4. Diagram Hertzsprung-Russella



z dobrego przybliżeniem można je uważać za zwyrodniałe gazy Fermiego. swięcące anomalnie słabo. Właśnie białe karły są dla nas bardzo interesujące, bowiem czerwonej barwy o anomalnie dużej jasności, oraz białe karły, czyli małe białe gwiazdy gwiazdy, które nie spełniają tego prawa. Są nimi czerwone olbrzymy, czyli ogromne gwiazdy pasa, zwanego ciągiem głównym, tak jak to przedstawiono na rys. 11.4. Istnieją jednak

Ponieważ temperatura Fermiego jest znacznie wyższa od temperatury gwiazdy, gaz elektronowy jest silnie zwyrodniały i zachowuje się tak jak w temperaturze zera bezwzględnej. Dlatego można go uważać za doskonały gaz Fermiego znajdujący się w stanie podstawowym. Ogromnemu ciśnieniu gazu elektronowego przeciwdziała przyciąganie grawitacyjne, które wiąże gwiazdę. Źródłem tego przyciągania są prawie wyłącznie jądra helu w gwiazdzie. Będziemy zaniedbywać ciśnienie wynikłe z ruchu jąder helu oraz jakiegokolwiek promieniowania.

Otrzymujemy więc następujący wyidealizowany model: biały karzeł jest układem  $N$  elektronów w stanie podstawowym o tak dużej gęstości, że zachowanie się elektronów należy opisywać zgodnie z dynamiką relatywistyczną. Elektrony poruszają się na tle  $N/2$  nieruchomych jąder helowych wytwarzających siłę przyciągania grawitacyjnego, która utrzymuje układ w stanie stabilnym\*. Taki model musi więc przejawiać własności, będące wypadkową efektów zakazu Pauliego, dynamiki relatywistycznej i prawa przyciągania grawitacyjnego.

Obliczmy najpierw ciśnienie wywierane przez gaz Fermiego relatywistycznych elektronów w stanie podstawowym. Stany pojedynczego elektronu wyznaczone są przez pęd  $p$  i spinową liczbę kwantową  $s = \pm \frac{1}{2}$ . Jednoznaczkowe poziomy energetyczne nie zależą od  $s$  i są dane przez

$$\varepsilon_{ps} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2},$$

gdzie  $m_e$  jest masą elektronu. Energia stanu podstawowego gazu Fermiego wynosi

$$E_0 = 2 \sum_{|p| < p_F} \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}, \quad (11.32)$$

gdzie pęd Fermiego  $p_F$  jest zdefiniowany następująco:

$$\frac{V}{h^3} \left( \frac{4}{3} \pi p_F^3 \right) = \frac{N}{2}$$

lub

$$p_F = \hbar \left( \frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3}. \quad (11.33)$$

Wprowadzając w (11.32) nową zmienną całkowania  $x = p/m_e c$ , otrzymujemy

$$\frac{E_0}{N} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \nu f(x_F), \quad (11.34)$$

\* Temperatury białych karłów są na tyle wysokie, że podczas zderzeń elektron–elektron mogą tworzyć się pary elektronowo–pozytonowe. Pary te z kolei anihilują, przekształcając się w promieniowanie. Dlatego też w stanie równowagi powinna występować pewna liczba par elektron–pozyton i pewna ilość promieniowania. My jednak zaniedbujemy takie efekty. Rozważano także możliwość znacznej produkcji neutronów podczas zderzeń elektron–elektron, elektron–pozyton i foton–foton. Możliwość taka prowadzi do powstania interesujących zjawisk, gdyż neutrona tak słabo oddziałują z materią, że nie osiągają równowagi termodynamicznej z pozostałą częścią układu. Neutrona po prostu opuszczają gwiazdę, powodując stałą ucieczkę energii. [H. Y. Chiu, P. Morrison, Phys. Rev. Lett., 5, 573 (1960)]. W naszym modelu takie zjawiska również pomija się.

$$K = \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left( \frac{h}{m_e c} \right)^3 \quad (11.44)$$

przy czym

$$P_0 \approx \left( \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 h^3} \right) (x_p^4 - x_p^2) = K \left( \frac{M_{4/3}}{R^4} - \frac{M_{2/3}}{R^2} \right) \quad (11.43)$$

a w granicy ultrarelatywistycznej ( $x_p \gg 1$ )

$$P_0 \approx \left( \frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2 h^3} \right) x_p^2 = \frac{5}{4} K \frac{M_{5/3}}{R^5} \quad (11.42)$$

W granicy nierelatywistycznej ( $x_p \ll 1$ ) otrzymujemy

$$P_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = -\frac{\pi^2 h^3}{m_e^4 c^5} \left[ -f(x_p) - \frac{\partial f(x_p)}{\partial x_p} v \frac{\partial v}{\partial x_p} \right] = \frac{\pi^2 h^3}{m_e^4 c^5} \left[ \frac{1}{3} x_p^3 \sqrt{1+x_p^2} - f(x_p) \right] \quad (11.41)$$

Ciśnienie gazu Fermiego równe jest

$$\bar{R} = \frac{R}{h/m_e c} \quad (11.40)$$

$$\frac{M}{9\pi} = \frac{8}{m_p} M$$

przy czym

$$x_p = \frac{h}{m_e c} \frac{1}{R} \left( \frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_p} \right)^{1/3} \equiv \frac{M_{1/3}}{R} \quad (11.39)$$

!

$$v = \frac{3}{8\pi} \frac{M}{m_p R^3} \quad (11.38)$$

gdzie  $m_p$  jest masą protonu. Wyrażmy  $v$  i  $x_p$  przez  $M$  i  $R$ :

$$R = \left( \frac{4\pi}{3V} \right)^{1/3}, \quad (11.37)$$

$$M = (m_e + 2m_p) N \approx 2m_p N,$$

jeśli całkowita masa gwiazdy wynosi  $M$ , a promień gwiazdy  $R$ , to

$$x_p = \frac{p_F}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} \left( \frac{3\pi^2}{V} v \right)^{1/3} \quad (11.36)$$

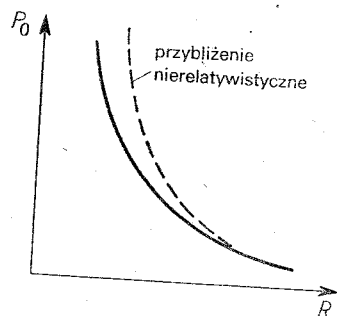
!

$$f(x_p) = \int_{x_p}^0 dx x^2 \sqrt{1+x^2} = \left\{ \frac{1}{3} x_p^3 \left( 1 + \frac{10}{3} x_p^2 + \dots \right) \right. \\ \left. \frac{1}{4} x_p^4 \left( 1 + \frac{x_p^2}{2} + \dots \right) \right\} \quad (11.35)$$

gdzie ( $x_p \gg 1$ )

gdzie

Na rysunku 11.5 przedstawiono jakościowy wykres  $P_0$  w funkcji  $R$  dla ustalonego  $M$ . Stwierdzamy, że dla małych  $R$  ciśnienie  $P_0$  jest mniejsze od obliczonego na podstawie dynamiki nierelatywistycznej.



Rys. 11.5. Ciśnienie doskonałego gazu Fermiego w temperaturze zera bezwzględnego

Znajdziemy teraz warunek, określający równowagę gwiazdy. Wyobraźmy sobie najpierw, że w gwiazdzie nie występuje przyciąganie grawitacyjne. Gęstość układu byłaby wówczas jednorodna i utrzymanie gazu Fermiego o określonej gęstości wymagałoby zastosowania zewnętrznych ścian. Aby sprężyć gwiazdę o określonej masie od stanu nieskończonego rozrzedzonego do stanu o skończonej gęstości, czynniki zewnętrzne musiałyby wykonać pracę

$$- \int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr, \quad (11.45)$$

gdzie  $P_0$  jest ciśnieniem jednorodnego gazu Fermiego, a  $R$  promieniem gwiazdy. Wyobraźmy sobie teraz, że oddziaływanie grawitacyjne jest „włączone”. Poszczególne części gwiazdy zaczną się teraz przyciągać, powodując zmniejszenie się energii gwiazdy o pewną wielkość, zwaną grawitacyjną energią własną. Na podstawie analizy wymiarowej stwierdzamy, że grawitacyjna energia własna powinna mieć postać

$$- \frac{\alpha \gamma M^2}{R} \quad (11.46)$$

gdzie  $\gamma$  jest stałą grawitacyjną, a  $\alpha$  bezwymiarowym parametrem rzędu jedności. Nasza teoria nie pozwala wyznaczyć ściślej wartości  $\alpha$ , gdyż wielkość ta zależy od funkcjonalnego związku pomiędzy gęstością a odległością. Jeśli  $R$  jest promieniem gwiazdy w stanie równowagi, to grawitacyjna energia własna jest dokładnie równa pracy sprężania gwiazdy. Stąd

$$\int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr = - \frac{\alpha \gamma M^2}{R}. \quad (11.47)$$

Różniczkując (11.47) po  $R$  otrzymujemy następujący warunek równowagi

$$P_0 = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\gamma M^2}{R^4} = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma \left( \frac{8m_p}{9\pi} \right)^2 \left( \frac{m_e c}{h} \right)^4 \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4}. \quad (11.48)$$