Zagadnienie stabilności, funkcja Liapunova

- Funkcja Liapunova
(inne podejście do problemu stabilności)

Tw
Niech $\bar{x}$ punkt stały i dana funkcja V
$V: W \to R$
(V jest fcją różniczkowalną, zdefiniowaną na otoczeniu $W \subset U$ punktu $\bar{x}$)

i) $V(\bar{x}) = 0$, $V(x) \geq 0$ if $x \neq \bar{x}$
ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ w $W \setminus \{\bar{x}\} \to \bar{x}$ stabilny

jeśli $\dot{V}(x) < 0$ w $W \setminus \{\bar{x}\}$, to punkt $\bar{x}$ jest asymptotycznie stabilny

Przykład
$$m\ddot{x} + k(x + x^3) = 0$$
$$E(x,y) = \frac{my^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)$$
$E(0,0) = 0$; $E(x,y) > 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$
$$\dot{E} = my\dot{y} + k(x + x^3)\dot{x} \equiv 0$$
(czyli $(0,0)$ jest 'neutralnie' stabilny)

Ważmy układ tłumiony
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\frac{k}{m}(x + x^3) - \alpha y$$
$$\Rightarrow \dot{E} = -\alpha m y^2$$
(wszędzie ujemne za wyjątkiem osi OX)

Zmodyfikujmy:
$$V = \frac{my^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) + \beta\left(xy + \frac{\alpha x^2}{2}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\dot{V} = -\beta\frac{k}{m}(x^2 + x^4) - (\alpha m - \beta)y^2$$
wystarczy dobrać małe β, żeby otrzymać asymptotyczną stabilność $(0,0)$

Analiza układów zachowawczych

ANALIZA UKŁADÓW ZACHOWAWCZYCH

$$\boxed{\frac{d}{dt}E=0} \quad \Updownarrow$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$$

$$\underbrace{\dot{x}}_{=\,u(x,y)}\frac{\partial E}{\partial x}+\underbrace{\dot{y}}_{=\,v(x,y)}\frac{\partial E}{\partial y}=0 \longrightarrow u\frac{\partial E}{\partial x}+v\frac{\partial E}{\partial y}= \underset{\sim}{u}\cdot\nabla E=0$$

PYTANIE: Jakie warunki musi spełniać pole wektorowe $\underset{\sim}{u}$, aby istniała co najmniej jedna funkcja $E(x,y)$ taka, że spełniony jest warunek $\underset{\sim}{u}\cdot\nabla E=0$

$$\underset{\sim}{u}\cdot\nabla E=0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{u}\perp\nabla E, \quad \nabla E=\begin{pmatrix}\partial E/\partial x\\ \partial E/\partial y\end{pmatrix}$$

Wniosek: wybór $\underset{\sim}{u}=\begin{pmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\partial E/\partial y\\ -\partial E/\partial x\end{pmatrix}$

gdzie μ → pewien czynnik całkujący

OCZYWIŚCIE: Jeśli $\underset{\sim}{u}=\mu(x,y)\begin{pmatrix}\frac{\partial E}{\partial y}\\ -\frac{\partial E}{\partial x}\end{pmatrix}$,

to $\nabla\cdot\frac{\underset{\sim}{u}}{\mu(x,y)}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial E}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial E}{\partial x}\right]=0$

UWAGI:

- Układ zachowawczy: istnieje co najmniej jedna całka ruchu (wielkość zachowana wzdłuż trajektorii)
- Układ Hamiltonowski: istnieje dwuargumentowa funkcja gładka H(p,q;t) o wartościach rzeczywistych, dla której zachodzi:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

PROSTY PRZYKŁAD

UKŁAD

DRAPIEŻCA – OFIARA

$$\left.\begin{aligned}\dot{R} &= aR - bRF \\ \dot{F} &= -cF + dRF\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy = u(x,y) \\ \dot{y} &= -cy + dxy = v(x,y)\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = (a - by) + (-c + dx) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Czyli układ nie jest "Hamiltonowski"

$\rightarrow$ Czy jest zachowawczy?

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\frac{u}{xy}\right) = 0}$$

MODEL JEST UKŁADEM ZACHOWAWCZYM!

Odpowiedź: 1) użyj $\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dfrac{ax - bxy}{-cy + dxy} = \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{a - by}{-c + dx}\right) = \dfrac{dx}{dy}$

$$\Downarrow$$

$$dx\left(\frac{dx - c}{x}\right) = dy\left(\frac{a - by}{y}\right)$$

ROZDZIELENIE zmiennych

2) całkuj $\rightarrow$ $dx - c\ln x + k = a\ln y - by$

WNIOSEK $\underline{dx + by - c\ln x - a\ln y}$ jest całką ruchu!

WNIOSEK

> Jeśli jesteśmy w stanie podać (skonstruować) funkcję $\mu(x,y)$, taką że $\nabla\cdot\left(\frac{\underset{\sim}{u}}{\mu}\right)=0$, to układ jest zachowawczy

$E(x,y)$ znajdujemy wówczas całkując równania

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{u(x,y)}{\mu(x,y)} \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{v(x,y)}{\mu(x,y)}$$

KONSEKWENCJE

Jeśli układ spełnia $\nabla\cdot\underset{\sim}{u} = 0$, wówczas $\mu=1$ i warunki zachowawczości dają się zapisać

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial y} = u(x,y) \\ -\frac{\partial E}{\partial x} = v(x,y) \end{cases}$$

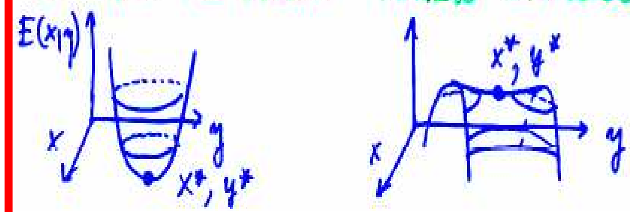
$\rightarrow$ Punkty stałe spełniają

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = 0,$$

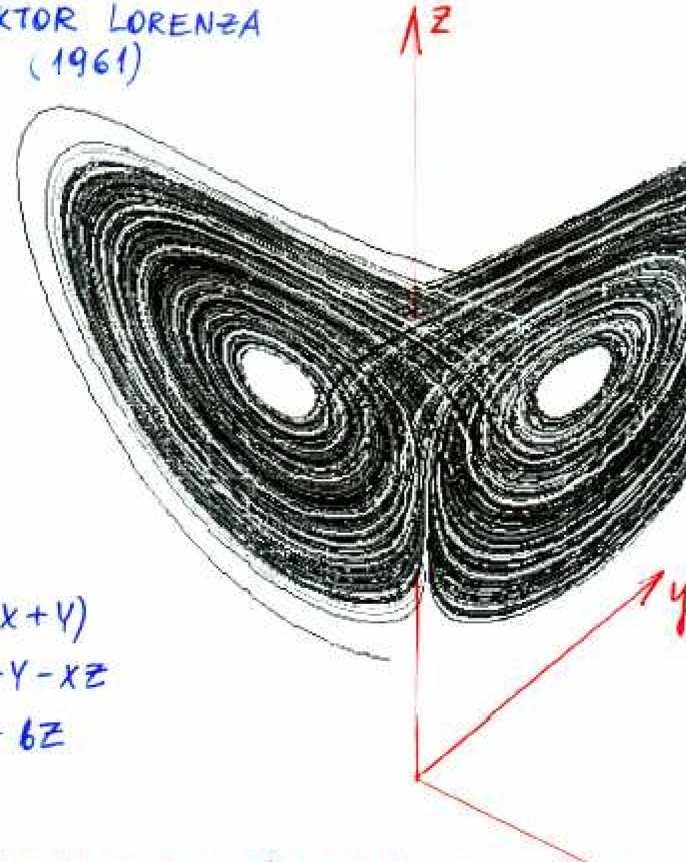
czyli są stacjonarnymi punktami E

Konsekwencje:

(A PONIEWAŻ TRAJEKTORIE SĄ LINIAMI O STAŁEJ WARTOŚCI E, TYP PUNKTU STACJONARNEGO MOŻNA POWIĄZAĆ Z TYPEM "PUNKTU STAŁEGO")



ATRAKTOR LORENZA (1961)



MODEL:

$$\dot{x} = \sigma(-x+y)$$
$$\dot{y} = Rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

NIECH V = element objętości przestrzeni fazowej

$$\frac{dV}{dt} = \int_V d\vec{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

gdzie

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, \vec{u})$$

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V < 0$$

DYSSYPACJA !

(nie jest konieczna do wystąpienia chaosu)

OPERATOR LIOUVILLE'A

$$\frac{d\rho(p,q)}{dt} = -iL\rho = \dot{q}\frac{\partial\rho}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial\rho}{\partial p}$$

- L działa na funkcje zespolone w przestrzeni fazowej
- funkcje te są całkowalne z kwadratem

Henri Poincaré

(April 29, 1854 - July 17, 1912)

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'etre connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'etre vécue.

- original French version of the quote on the main page taken from *Science et méthode*

• Uwaga

W niedysypatywnych (a więc zachowawczych) układach mechanicznych nie istnieją dziwne atraktory (... ani atraktory wogóle)

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_s, dp_1 \dots dp_s$$

$$\int d\Gamma = \text{const}$$

Tw. Liouville'a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho \vec{v} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

dla przepływu stacjonarnego

$$\rho = \rho(p, q)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$$

$$\left(\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$$\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 = \sum_i^n \left(\dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right)$$

BRAK KONTRAKCJI PRZESTRZENI FAZOWEJ!

…oczywiście, nie jest to przypadek atraktora Lorenza – w tym układzie dynamicznym „objętość” przestrzeni fazowej NIE JEST zachowana!

CYKLE GRANICZNE

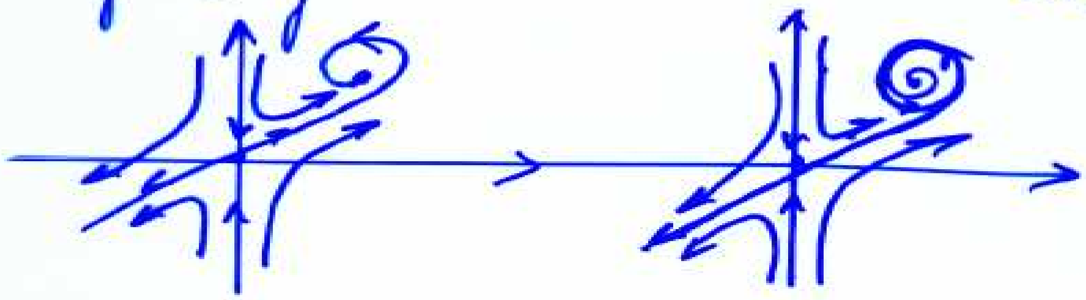
(IZOLOWANE ORBITY ZAMKNIĘTE)

Istnienie ? Stabilność ?

PRZYKŁAD

$$\dot{x} = x(2-x-y)$$
$$\dot{y} = x-y$$

punkty stałe (0,0) – siodło
(1,1) – stabilna spirala



- JAK POŁĄCZYĆ PUNKTY STAŁE?
- KTÓRY OBRAZ FAZOWY PRAWIDŁOWY?

... W ZASADZIE NIE MA SYSTEMATYCZNEJ METODY NA WYKRYWANIE CYKLI GRANICZNYCH

... ALE ISTNIEJE KILKA TWIERDZEŃ POZWALAJĄCYCH OCENIĆ, CZY W BADANYM UKŁADZIE MOŻLIWE SĄ CYKLE GRANICZNE

Załóżmy istnienie izolowanej orbity zamkniętej.
Wtedy:

$$\oint \nabla V \cdot dl = 0 \quad \left(\text{bo } \oint \nabla V \cdot dl = \oint \nabla V \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = \oint dV = 0 \right)$$

ale: $\boxed{\nabla V = -\dot{x}} \Rightarrow \oint \nabla V \cdot dl = -\oint \frac{dx}{dt} dx + \frac{dy}{dt} dy$

V: potencjał

$$= -\oint \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt \leq 0$$

... jedynym sposobem na osiągnięcie $\oint \nabla V \cdot dl = 0$ byłoby zniknięcie wszędzie:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

Dygresja….

JAK SPRAWDZAMY, czy układ jest zadany przez potencjał?

$$\dot{x} = f(x,y) = -\frac{dU}{dx}$$

$$\dot{y} = g(x,y) = -\frac{dU}{dy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

W POLACH POTENCJALNYCH WYKLUCZONE JEST ISTNIENIE ORBIT ZAMKNIĘTYCH

PUNKTY STACJONARNE: charakterystyka

ANALIZA UKŁADÓW 2-dim

MODEL DRAPIEŻCA- OFIARA
(Lotka - Volterra)

Króliki (R) oraz lisy (F):

$$\dot{R} = aR - bRF$$
$$\dot{F} = -cF + dRF$$

$a, b, c, d >$

Możliwe przekształcenie

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} &= y(2 - x - y)\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & -2y-x+2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

4 punkty stacjonarne $(0,0)$, $(0,2)$; $(3,0)$, $(1,1)$

$\rightarrow (0,0)$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ niestabilne ognisko $\lambda_{1,2} = 3, 2$

$\rightarrow (0,2)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ stabilne ognisko $\lambda_{1,2} = -1, -2$

$\rightarrow (3,0)$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ stabilne ognisko $\lambda_{1,2} = -3, -1$

$\rightarrow (1,1)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ punkt siodłowy $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Co możemy wnosić o portrecie fazowym?

- Kryterium Bendixona

Jeśli w $D \subset R^2$, wyrażenie $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ nie jest identycznościowo równe 0 i nie zmienia znaku, wówczas układ dynamiczny

$$\dot{x} = f(x,y)$$
$$\dot{y} = g(x,y)$$

nie ma orbit zamkniętych całkowicie zawartych w D

SZKIC DOWODU:

Dowód:

Konsekwencja twierdzenia Greena!

$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f}$ lub $\int_\gamma \left(f(x,y)dy - g(x,y)dx\right) = 0$

dla dowolnej orbity zamkniętej γ

$$\Rightarrow \iint_{S(\gamma)} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)dx\,dy = 0 \qquad (*)$$

Zatem, jeśli $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} > 0$ (lub < 0) w D, nie można znaleźć obszaru $S \subset D$, takiego, że (*) spełnione.

Kryteria negatywne:

Są dwa kryteria negatywne wykluczające istnienie cyklu granicznego w układach typu:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

1. Kryterium Bendixona:

Niech D będzie spójnym obszarem na płaszczyźnie fazowej. Jeśli wyrażenie $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ nie jest zerem dla wszystkich $(x, y) \in D$ i nie zmienia znaku w D to w regionie D nie ma zamkniętych orbit.

2. Kryterium Dulaca:

Niech D będzie spójnym obszarem na płaszczyźnie fazowej, zaś $B(x, y)$ ciągłą i różniczkowalną w D funkcją. Jeśli wyrażenie $\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y}$ nie jest zerem dla wszystkich $(x, y) \in D$ i nie zmienia znaku w D to w regionie D nie ma zamkniętych orbit.

Bifurkacja Hopfa

Teoria bifurkacji Hopfa jest kolejnym narzędziem do badania występowania cykli granicznych. Działa także dla więcej niż dwuwymiarowych systemów.
Dla ustalenia uwagi zajmijmy się najpierw układem dwuwymiarowym, który posiada pewien parametr γ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \gamma)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, \gamma)$$

Załóżmy, że układ ten posiada pewien stan stacjonarny, który może zależeć od parametru γ: $(x^*(\gamma), y^*(\gamma))$

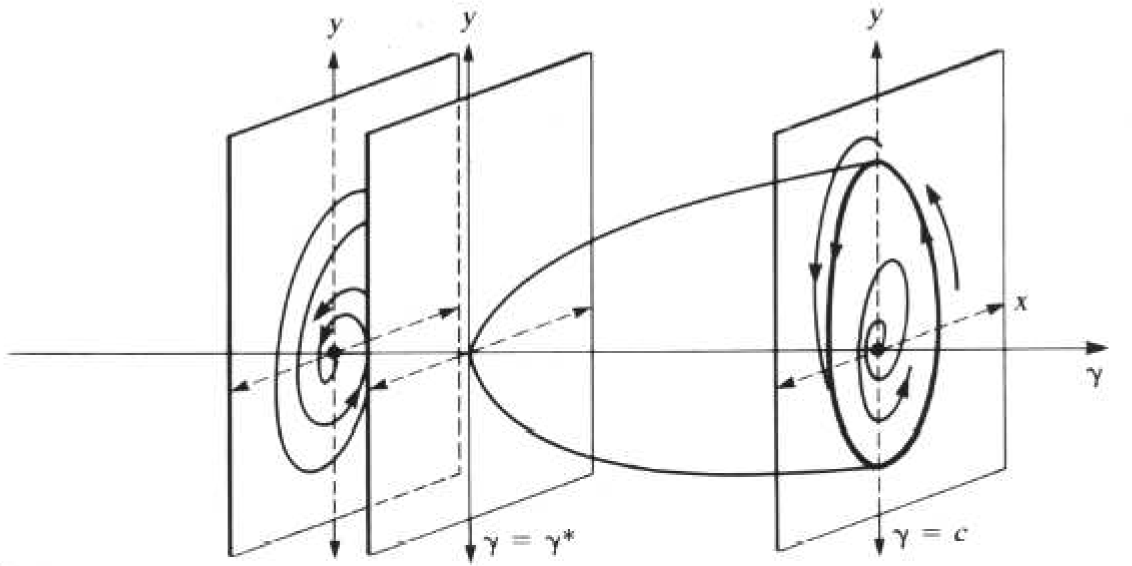
Załóżmy następnie, że jakobian układu:

$$J(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

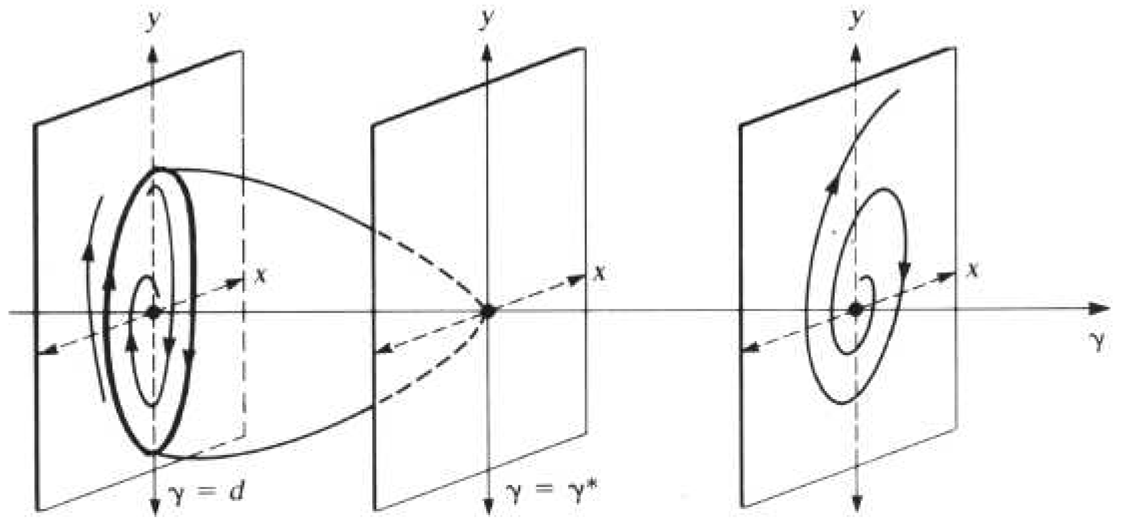
ma zespolone wartości własne $\lambda(\gamma) = a(\gamma) \pm i\, b(\gamma)$

Jeśli istnieje taka wartość γ^* dla której $a(\gamma^*) = 0$ i $b(\gamma^*) \neq 0$ i przy przejściu przez γ^*, a zmienia znak (punkt stacjonarny traci stabilność) to są możliwe następujące przypadki:

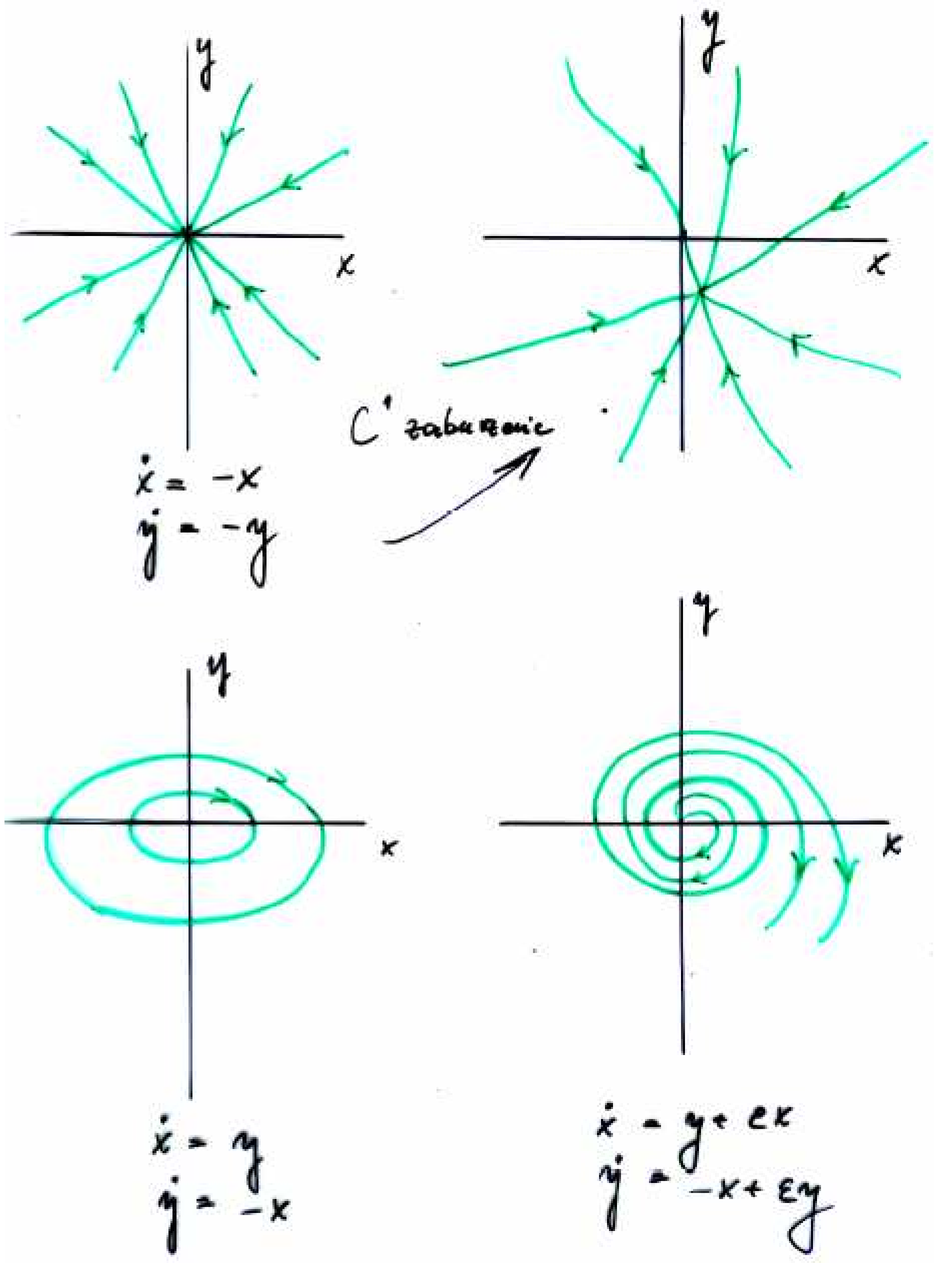
1. Dla wartości $\gamma = \gamma^*$ powstaje centrum tak więc wokół $(x^*(\gamma), y^*(\gamma))$ powstają koncentryczne zamknięte orbity.
2. Jest pewien zakres wartości parametru $\gamma^* < \gamma < c$, dla którego powstaje jedna zamknięta orbita – cykl graniczny otaczająca $(x^*(\gamma), y^*(\gamma))$, jej promień zmienia się proporcjonalnie do $\sqrt{|\gamma - \gamma^*|}$ - amplituda oscylacji rośnie stopniowo wraz z oddalaniem się od punktu krytycznego. Zjawisko to nazywa się nadkrytyczną bifurkacją Hopfa bo zachodzi powyżej γ^*
3. Jest pewien zakres wartości parametru $d < \gamma < \gamma^*$, (podkrytyczna bifurkacja Hopfa) dla którego jednocześnie punkt stacjonarny traci stabilność i znika niestabilny cykl graniczny, może pozostać stabilny cykl graniczny. W ten sposób mogą nagle powstać w układzie oscylacje o dużej amplitudzie.



(a)



(b)



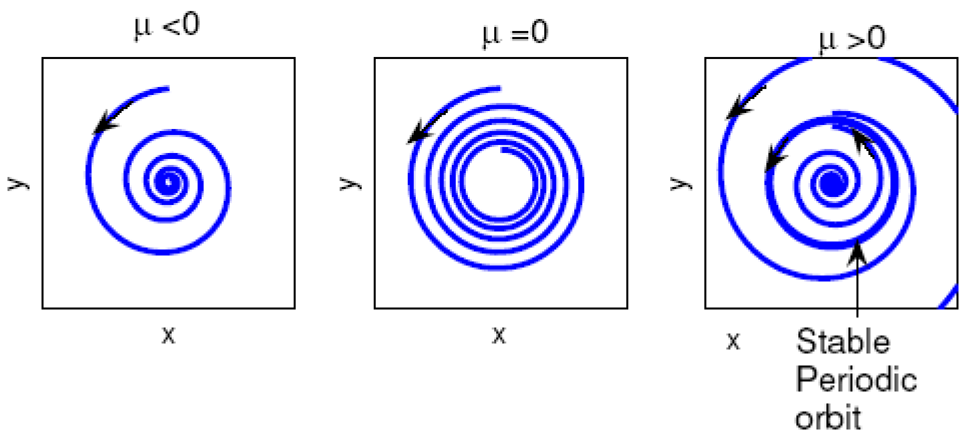
Zmiana portretu fazowego pod wpływem zaburzenia klasy C¹

BIFURKACJA HOPFA

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \quad \text{and} \quad \dot{\theta} = \omega$$

W zmiennych biegunowych…



POSTAĆ NORMALNA BIFURKACJI HOPFA

POSTAĆ NORMALNA

dla bifurkacji Hopfa

⇒ ciągła zmiana zmiennych

$$\dot{x} = (d\mu + a(x^2+y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2+y^2))y$$

$$\dot{y} = (\omega + c\mu + b(x^2+y^2))x + (d\mu + a(x^2+y^2))y$$

W zmiennych biegunowych

$$\dot{r} = (d\mu + ar^2)r$$

$$\dot{\theta} = (\omega + c\mu + br^2)$$

r, θ → rozseparowane równania

Wniosek: orbity zamknięte o promieniu r →

dla $a \neq 0$ i $d \neq 0$ leżą one na

paraboli $\mu = -ar^2/d$

Macierz zlinearyzowanego wokół "położenia równowagi" układu dynamicznego posiada (dla pewnej wartości parametru kontrolnego) pierwiastki (wartości własne) ściśle urojone.

Np.

$$\dot{x} = \mu x - \omega y$$
$$\dot{y} = \omega x + \mu y$$

Rozwiązania

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$\mu < 0 \Rightarrow$ rozwiązanie po spirali zwijającej się

$\mu > 0 \Rightarrow$ rozwiązania "rozwijające się"

$\mu = 0 \Rightarrow$ rozwiązania są periodyczne

? POSTAĆ NORMALNA

(charakterystyczna postać r. różniczkowego na rozmaitości centralnej)

$\dot{x} = f(x)$, zmiana zmiennych:

$x = h(y)$, $h(0) = 0$

$$Dh(y)\dot{y} = \dot{x} = f(h(y))$$
$$\dot{y} = [Dh(y)]^{-1} f(h(y))$$

POSTAĆ NORMALNA

Mamy zatem.

$$\dot{y} = [\mathbb{I} - DP(y)]\, f(y+P(y)) = [\mathbb{I} - DP(y)][\Lambda x + g(x)] =$$

$$= \Lambda x + g(x) - DP(y)[\Lambda x + g(x)]$$

$$= \Lambda(y + P(y)) + g(y + P(y))$$

$$- DP(y)\left[\Lambda(y+P(y)) + g(h(y))\right]$$

Uwaga: równanie wektorowe .... człony rzędu "k" funkcji g

$$= \lambda_i y_i + \lambda_i P_i(y) + g_i^k(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j$$

Żądamy niezmienniczości członu lewego

$$\Downarrow$$

$$\lambda_i P_i(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = -g_i^k(y)$$

Lewa strona : nawias Poissona

$$\mathcal{L} P_i(y) = \lambda_i P_i(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j$$

POSTAĆ NORMALNA BIFURKACJI HOPFA

$$[a,b] = \left[\frac{\partial b}{\partial x}\right]\cdot a - \left[\frac{\partial a}{\partial x}\right] b$$

POSTAĆ NORMALNA

$$[a,b]_i = \sum_{j}^{n} a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

Nawias Poissona = operacja algebry Liego

Zauważmy, że jeśli P_i żadane wielomianem typu $y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n}$, to $\left(\frac{\partial P_i}{\partial y_j}\right)\lambda_j y_j = a_j \lambda_j P_i$

Czyli lewa strona $\lambda_i P_i(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = -g_i^k(y)$ (*)

$$LHS = \left(\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j\right) P_i$$

Ta postać dowodzi, że $y_1^{a_1} \ldots y_n^{a_n}$ są funkcjami własnymi operatora L (nawiasu Poissona) do wartości własnych $\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j$

POSTAĆ NORMALNA BIFURKACJI HOPFA

WNIOSEK: W powyższych wyrażeniach możliwe jest znalezienie P spełniającego $(*)$, o ile żadna z sum $\lambda_i - \sum a_j \lambda_j$ nie jest równa zeru, przy warunku, kiedy $a_1, \dots, a_n$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, takimi, że $\sum a_j = k$

(innymi słowy, jeśli niemożliwe jest spełnienie równania $\lambda_i - \sum a_j \lambda_j = 0$ przy warunkach na $\{a_i\}$, potok fazowy układu dyn. można zlinearyzować do dowolnego rzędu!)

KONSEKWENCJE DLA

PRZYPADKU BIFURKACJI HOPFA

(kiedy $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, czyli $\lambda_{1,2} = \pm wi$)

Mamy wówczas $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_2 \ \ldots$$

i ogólnie

$$(k+1)\lambda_1 + k\lambda_2 = \lambda_1 \text{ lub } k\lambda_1 + (k+1)\lambda_2 = \lambda_2$$

Zatem "rezonansowe" wielomiany $z_1 z_2^2$, $z_1^2 z_2$

$z_1^{k+1} z_2^k$, $z_1^k z_2^{k+1}$

są nie do usunięcia w procedurze linearyzacji!

Wyprowadzenie postaci normalnej dla bifurkacji Hopfa…

POSTAĆ NORMALNA BIFURKACJI HOPFA

Linearyzacja…

$$\dot{x} = \Lambda x + g(x) \equiv f(x)$$

$$x = h(y) = y + P(y) \leftrightarrow \dot{x} = \dot{y} + DP(y)\dot{y}$$

funkcja wielomianowa danego stopnia

$$\dot{y}[\mathbb{I} + DP(y)] = \dot{x}$$

$$\dot{y} = [Dh(y)]^{-1} f(h(y))$$

$$= [D(y + P(y))]^{-1} f(y + P(y)) \quad (***)$$

$$= [\mathbb{I} + DP(y)]^{-1} f(y + P(y))$$

$$\approx \mathbb{I} - DP(y)$$

$$= f(y + P(y)) - DP(y) f(y + P(y))$$

POSTAĆ NORMALNA (BIFURKACJI HOPFA, między innymi…)

Ideologia: Funkcje g_i wektora $g(x)$ znikają w punkcie stacjonarnym $x_0 = 0$ z dokładnością do drugiego rzędu.

Poszukujemy takiej transformacji zmiennych $x = h(y)$ (formy identyczność + człony wyższych rzędów), aby spełniony był warunek (***) z jednoczesnym znikaniem jego członów nieliniowych do rzędu wyższego niż $g(x)$

Wyprowadzenie postaci normalnej dla bifurkacji Hopfa

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

(1) $\lambda = \pm i\omega$

(1) $\dot{z} = \lambda z + h(z,\bar{z})$ $\quad z = x+iy$, $\lambda = i\omega$

postać normalna przyjmuje dla $\mu=0$ wyrażenie

(2) $\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2\bar{w} + c_2 w^3\bar{w}^2 + \ldots + c_k w^{k+1}\bar{w}^k + \ldots$

$\equiv \lambda w + h(w,\bar{w})$, $c_k = a_k + ib_k$

(2) Aby otrzymać (2), dokonujemy transformacji

$z = w + \psi(w,\bar{w})$, $\psi = O(|w|^2)$

Wtedy z (1) dostajemy po użyciu (2)

(3) $\lambda(w\psi_w - \psi) + \bar{\lambda}\bar{w}\psi_{\bar{w}} = h(w+\psi, \bar{w}+\bar{\psi}) -$

$- h(w,\bar{w})(1+\psi_w) - \overline{h(w,\bar{w})}\psi_{\bar{w}}$

(4)

Rozwinięcie ψ w szereg Taylora

$$\psi(w,\bar{w}) = \sum_{2\le j+k\le 3} \psi_{jk}\frac{w^j\bar{w}^k}{j!k!} + O(|w|^4)$$

Ponadto : $h(w,\bar{w}) = c_1 w^2\bar{w} + O(|w|^5)$
(z równania 2)

Podstawienie do daje:

$$\chi\,\psi_{ww}\frac{w^2}{2} + \bar{\chi}\,\psi_{w\bar{w}}\,w\bar{w} + (2\bar{\chi}-\chi)\psi_{\bar{w}\bar{w}}\frac{\bar{w}^2}{2} =$$

$$h_{ww}\frac{w^2}{2} + h_{w\bar{w}}\,w\bar{w} + h_{\bar{w}\bar{w}}\frac{\bar{w}^2}{2} + \ldots.$$

$$\Downarrow$$

$$\psi_{ww} = \frac{h_{ww}}{\chi} = -\frac{i\,h_{ww}}{\omega}$$

$$\psi_{w\bar{w}} = \frac{h_{w\bar{w}}}{\chi} = \frac{i\,h_{w\bar{w}}}{\omega}$$

$$\psi_{\bar{w}\bar{w}} = \frac{h_{\bar{w}\bar{w}}}{(2\bar{\chi}-\chi)} = \frac{i\,h_{\bar{w}\bar{w}}}{3\omega}$$

Następny krok: rozwinięcie do rzędu o jeden wyższego, porównanie współczynników przy $w^2\bar{w}$

Wyprowadzenie postaci normalnej dla bifurkacji Hopfa…

Wyprowadzenie postaci normalnej dla bifurkacji Hopfa…

Lewa strona równania (3) znika identycznie, zaś prawa

$$h_{ww}\psi_{ww} + h_{w\bar w}\left(\frac{\psi_{ww}}{2} + \bar\psi_{w\bar w}\right) + h_{\bar w\bar w}\frac{\bar\psi_{\bar w\bar w}}{2} + \frac{h_{ww\bar w}}{2} - c_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = \frac{i}{2\omega}\left(h_{ww}h_{w\bar w} - 2|h_{w\bar w}|^2 - \frac{1}{3}|h_{ww}|^2\right) + \frac{h_{ww\bar w}}{2}$$

$$2a_1 = 2\mathrm{Re}\,c_1 = h^R_{ww\bar w} - \frac{1}{\omega}\left(h^R_{ww}h^I_{w\bar w} + h^R_{w\bar w}h^I_{ww}\right)$$

Zaś używając oryginalnych funkcji $f(x,y)$ i $g(x,y)$ (po rozwinięciu w Σ Taylora)

$$h^R_{ww\bar w} = \frac{1}{8}\left(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}\right)$$

$$h^R_{ww} = \frac{1}{4}\left(f_{xx} - f_{yy} + 2g_{xy}\right)$$

$$h^I_{ww} = \frac{1}{4}\left(g_{xx} - g_{yy} - 2f_{xy}\right)$$

$$h^R_{w\bar w} = \frac{1}{4}\left(f_{xx} + f_{yy}\right)$$

$$h^I_{w\bar w} = \frac{1}{4}\left(g_{xx} + g_{yy}\right)$$

Wyprowadzenie postaci normalnej dla bifurkacji Hopfa…

Ostatecznie…

$$16a_1 = (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{\omega}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

Uwaga: POSTAĆ NORMALNA B. HOPFA

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(w^5)$$

$$\lambda = \mu + i\omega$$