

Bifurkacje

[Ewa Gudowska-Nowak Nowak](#)

Plus ratio quam vis



M. Kac Complex Systems Research Center,
M. Smoluchowski Institute of Physics, Jagiellonian University, Kraków, Poland

2008

Główna idea..

- Pozornie "dynamika" układów 1-dim bardzo prosta: rozwiązania uzbiegają się do punktów stałych, albo uciekają do $\pm\infty$
- Interesujące zachowania (jakościowa zmiana potoku) obserwowalne przy zmianie wartości **parametru** występującego w opisie
- Jakościowe zmiany potoku \Leftrightarrow **BIFURKACJE**
- Punkty bifurkacji to wartości (krytyczne) parametru, przy których rejestrowalne są bifurkacje
- Bifurkacje stanowią modele przejść "fazowych" i niestabilności pojawiających się w układzie w wyniku zmian pewnego parametru kontrolnego



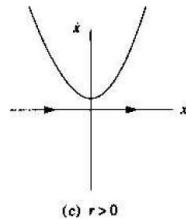
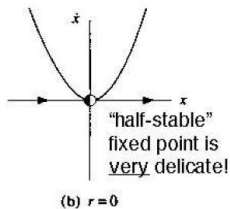
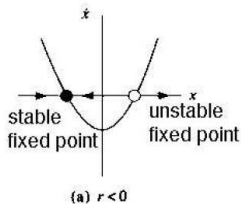
Scenariusze bifurkacji

zmiana ilości i stabilności punktów stałych

- Punkt stały jest **HIPERBOLICZNY** jeśli wartości zlinearyzowanego potoku w tym punkcie są niezerowe
- Punkty hiperboliczne są strukturalnie stabilne (grafik potoku może być zaburzony nieliniowymi poprawkami do badanego równania różniczkowego, ale nie zmieni charakteru stabilności w tym punkcie)
- Lokalne bifurkacje pojawiają się w punktach niehiperbolicznych



$$\dot{x} = r + x^2$$



bifurkacja występuje dla wartości $r = 0$

$$\dot{x} = r + x^2$$

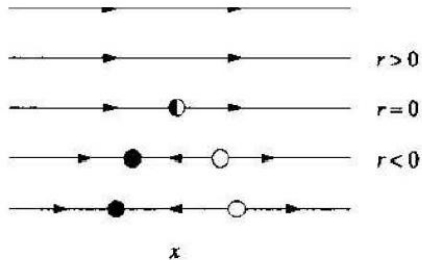
Bifurkacja **siodło-węzeł** -

podstawowy mechanizm tworzenia i niszczenia punktów stałych...



konwencja graficzna...

pole wektorowe

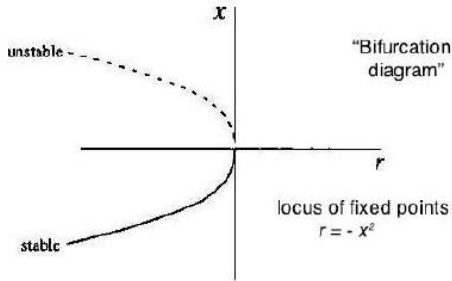


Zachowanie pól wektorowych skojarzonych z równaniem $\dot{x} = r + x^2$



DIAGRAM BIFURKACYJNY

bifurkacja siodło-węzeł, $\dot{x} = r + x^2$



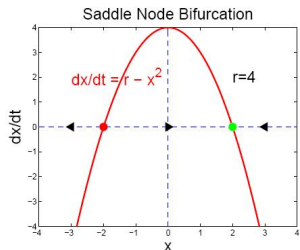
Punkt startowy musi znajdować się poniżej linii przerywanej,
aby układ dążył do stanu stabilnego



Przykład $\dot{x} = r - x^2$

- punkty stałe $f(x) = r - x^2 = 0 \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{r}$
- dwa punkty stałe dla $r > 0$
- zero punktów stałych dla $r < 0$
- $f'(x^*) = -2x^* \Rightarrow x^* = +\sqrt{r}$ **stabilny**,
 $x^* = -\sqrt{r}$ **niestabilny**
- w punktach bifurkacji $r = 0$ oraz $f'(x^*) = 0$, zatem linearyzacja traci sens (znika)

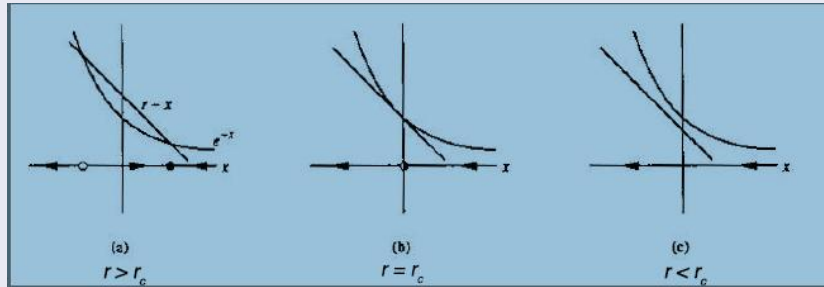
saddle-node



Przykład $\dot{x} = r - x - e^{-x}$

- punkty stałe $f(x) = r - x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x^* = ?$
- rozwiązanie graficzne, przecięcie $r - x$ i e^{-x}

saddle-node??

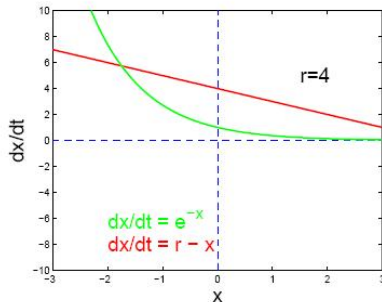


Przykład $\dot{x} = r - x - e^{-x}$

- $r - x = e^{-x}$ oraz $\frac{d}{dx}(r - x) = \frac{d}{dx}e^{-x}$
- stąd $r = r_c = 1$ i punkt bifurkacji pojawia się w $x = 0$

saddle-node??

- $f_1(x) = r - x$ and $f_2(x) = \exp(-x)$



Przykład $\dot{x} = r - x - e^{-x}$, podsumowanie

- $r < 1$
 - brak punktów stałych
 - wykres $f_1 = r - x$ poniżej wykresu $f_2 = e^{-x}$
 - $f(x) = f_1(x) - f_2(x) < 0$, tj. ujemny kierunek potoku...
- $r = 1$
 - jeden punkt stały x^* w $1 - x^* - e^{-x^*} = 0$, tzn. $x^* = 0$
 - wykres f_1 styczny do wykresu f_2
 - $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$, tj. nieokreślony kierunek potoku
- $r > 1$
 - dwa punkty stałe
 - wykres f_1 przecina wykres f_2
 - $f(x) = f_1(x) - f_2(x) > 0$ pomiędzy punktami stałymi oraz $f(x) < 0$ na zewnątrz...

Te informacje wystarczają do naszkicowania **diagramu bifurkacyjnego**, czyli wykresu ilustrującego stabilność punktów stacjonarnych w funkcji parametru kontrolnego



Analiza w oparciu o linearyzację...

Examples

szereg Taylora dla $f = r - x - e^{-x}$ wokół
 $(x_0, r_0) = (x^*, r_{cr}) = (0, 1)$

$$\begin{aligned}
 f(x, r) = & f(x_0, r_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, r_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x_0, r_0)} (r - r_0) \\
 & + 0.5 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, r_0)} (x - x_0)^2 + 0.5 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{(x_0, r_0)} (r - r_0)^2 + \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r} \Big|_{(x_0, r_0)} (x - x_0)(r - r_0) + \text{człony w. rzędów}
 \end{aligned}$$



Examples

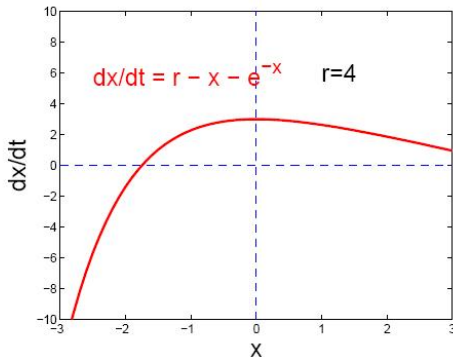
szereg Taylora dla $f = r - x - e^{-x}$ wokół
 $(x_0, r_0) = (x^*, r_{cr}) = (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi, r_0 + \rho) &= f(x_0, r_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, r_0)} \xi + \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x_0, r_0)} \rho + \\ &+ 0.5 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, r_0)} \xi^2 + 0.5 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{(x_0, r_0)} \rho^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r} \Big|_{(x_0, r_0)} \xi \rho + \text{człony w. rzędów} \end{aligned}$$

$f(x^*, r_{cr}) = 0$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, r_{cr}) = 0$, $\xi = x - x^*$, $\rho = r - r_{cr}$
 $\dot{x} = f(x, r) = (r - r_{cr}) - \frac{1}{2}(x - x^*)^2 + \dots$ człony wyższych rzędów
niech $R = \frac{r-1}{2}$ oraz $X = x/2 \Rightarrow \dot{X} = R - X^2$ (LOKALNIE)



Przykład $\dot{x} = r - x - e^{-x}$



- Wniosek: blisko wartości krytycznej $r^* = 1$ zachowanie układu jest takie jak $\dot{x} = R - x^2$ przy warunku $R \propto 0$
- ogólnie **postać normalna** dla bifurkacji siodło-węzeł $\dot{x} = a(r - r_{cr}) + b(x - x^*)^2$



bifurkacja siodło-węzeł: własności charakterystyczne

- $f(x^*, r_{cr}) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, r_{cr}) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial r}(x^*, r_{cr}) \neq 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, r_{cr}) \neq 0$
- ogólnie **postać normalna** dla bifurkacji siodło-węzeł

$$\dot{x} = a(r - r_{cr}) + b(x - x^*)^2$$

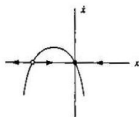


Zmiana stabilności: bifurkacja transkrytyczna

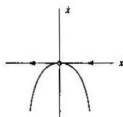
- podstawowy mechanizm zmiany stabilności punktów stałych przy wariacji parametru kontrolnego
- przykład z poprzedniego wykładu $\dot{x} = rx - x^2$ - wzrost populacji

Examples

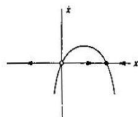
bifurkacja transkrytyczna $r < 0$ $r = 0$ $r > 0$



(a) $r < 0$



(b) $r = 0$



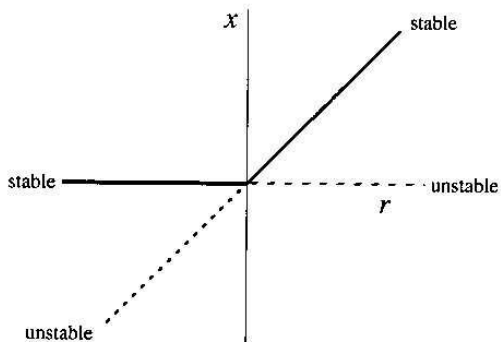
(c) $r > 0$

Zmiana stabilności między $x^* = 0$ i $x^* = r$. Przeciwnie do bifurkacji siodło-węzeł, dwa punkty stałe nie znikają



Bifurkacja transkrytyczna

diagram bifurkacyjny



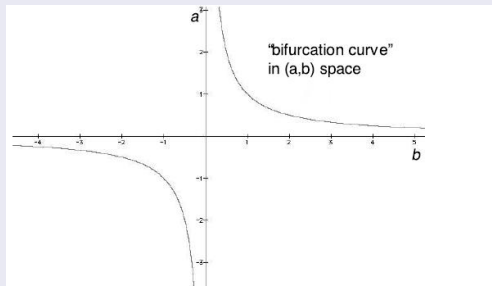
Bifurkacja transkrytyczna przy warunku $f(x^*) - f'(x^*) = 0$



Przykład $\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$

- punkt $x^* = 0$ jest punktem stałym dla wszystkich par (a, b)
- po rozwinięciu wokół $x = 0$:
- $\Rightarrow \dot{x} = (1 - ab)x + \left(\frac{ab^2}{2}\right)x^2 + O(x^3)$
- bifurkacja transkrytyczna pojawia się gdy $ab = 1$

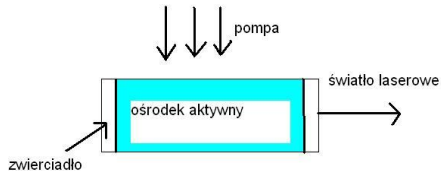
bifurkacja transkrytyczna



Przykład: akcja laserowa

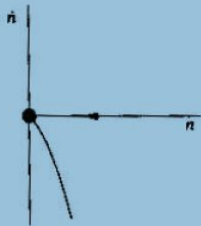
- $n(t)$ liczba fotonów w świetle laserowym
- zmiana w czasie: $\dot{n} = \text{zysk} - \text{strata} = GnN - kn$
- $N(t)$ liczba wzbudzonych atomów w materiale aktywnym optycznie, straty: $\propto kn$, wymuszona emisja (zysk) $\propto GNn$ z pewnym współczynnikiem G
- $N(t) = N_0 - \alpha n$, gdzie N_0 zależy od siły pompowania i utrata $N(t)$ następuje w wyniku emisji fotonów ($\alpha > 0$)

akcja laserowa

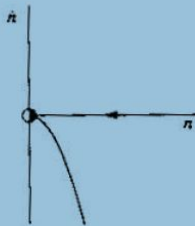


Przykład: akcja laserowa $\dot{n} = (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2$

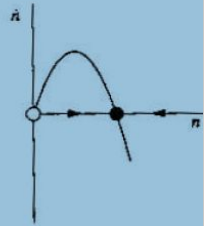
akcja laserowa



(a) $N_0 < k/G$
No stimulated emission -
laser acts like a lamp!



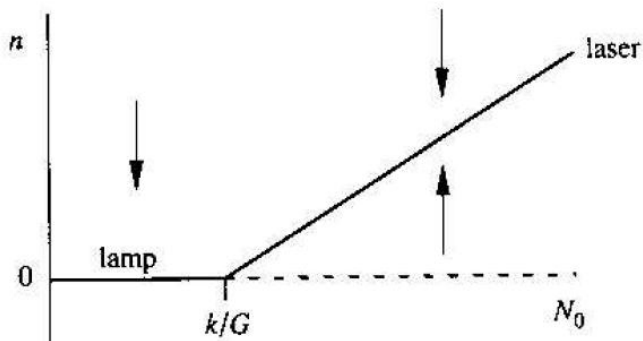
(b) $N_0 = k/G$
transcritical
bifurcation



(c) $N_0 > k/G$
spontaneous
laser action



$$\text{Akcja laserowa } \dot{n} = (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2$$



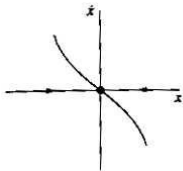
- $n(t)$ liczba fotonów w świetle laserowym



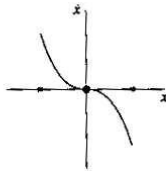
"pitchfork bifurcation"

Ten rodzaj bifurkacji jest **typowy** w zagadnieniach posiadających symetrię: punkty stałe pojawiają się i znikają w **symetrycznych parach**

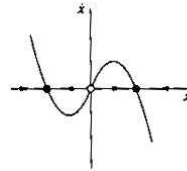
Superkrytyczna bifurkacja widelcowa $\dot{x} = rx - x^3$ (niezmiennicze przy $x \rightarrow -x$)



(a) $r < 0$



(b) $r = 0$



(c) $r > 0$

- $r < 0$: rozwiązania zanikają eksponencjalnie
- $r = 0$: linearyzacja znika, rozwiązania relaksują algebraicznie (**krytyczne spowolnienie**)
- $r > 0$: dwa punkty stałe



analiza $\dot{x} = f(x) = rx - x^3$

• Punkty stałe

$$f(x^*) = 0 \rightarrow x^* = \pm\sqrt{r} \text{ lub } x^* = 0$$

- punkt stały $x^* = 0$ niezależny od wartości r
- $r > 0$ - trzy punkty stałe $x^* = \pm\sqrt{r}$ oraz $x^* = 0$
- $r = 0$ - jeden punkt stały $x^* = 0$
- $r < 0$ - jeden punkt stały $x^* = 0$

• Stabilność punktów stałych

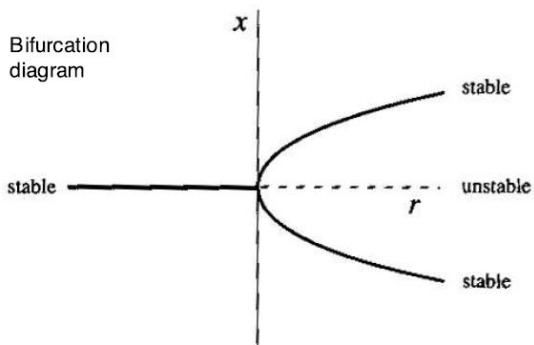
$$f'(x) = r - 3x^2$$

- $f'(0) = r$, stabilny dla $r < 0$ i niestabilny dla $r > 0$
- $r > 0 \Rightarrow f'(\pm\sqrt{r}) = -2r < 0$: punkt stabilny
- $r = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$: stabilność "mieszana" bądź nieokreślona
- $r < 0 \Rightarrow f'(0) < 0$ więc $x^* = 0$ stabilny

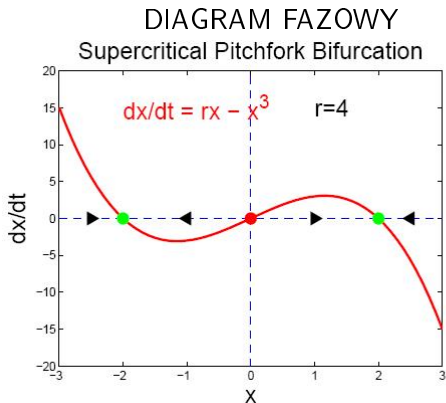


superkrytyczna bifurkacja widelcowa

DIAGRAM BIFURKACYJNY



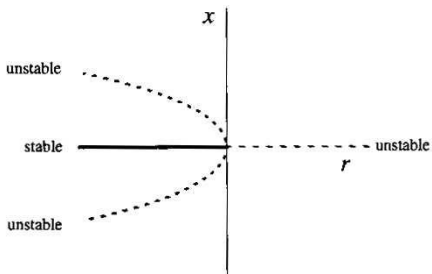
superkrytyczna bifurkacja widelcowa



"pitchfork bifurcation"

Subkrytyczna bifurkacja widelcowa: $\dot{x} = rx + x^3$

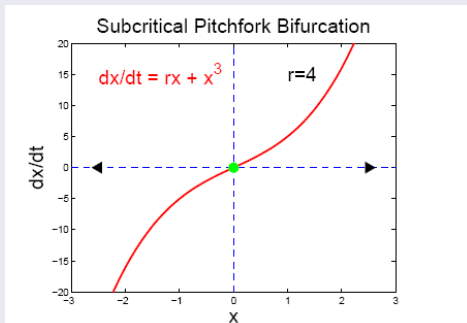
(obecność członów nieliniowych destabilizuje układ)



"pitchfork bifurcation"

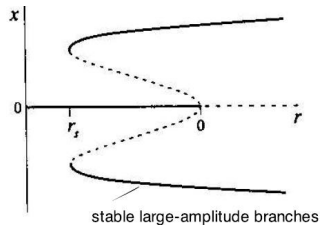
Subkrytyczna bifurkacja widelcowa

diagram fazowy



PODSUMOWANIE

- w układach rzeczywistych obecność członów nieliniowych jest oczekiwana (niemal oczywista!)
- spróbujmy przeanalizować $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$



koegzystencja dwóch różnych stanów stabilnych
warunki początkowe x_0 decydują o tym, do którego punktu stacjonarnego zmiierzają rozwiązania

punkt $x = 0$ jest **lokalnie**, ale nie **globalnie** stabilny...

