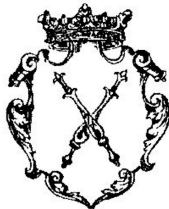


Równania różniczkowe rzędu pierwszego

Ewa Gudowska-Nowak

Plus ratio quam vis



Centrum Badania Układów Złożonych im. M. Kaca,
Instytut Fizyki im. M. Smoluchowskiego, Uniwersytet Jagielloński, Kraków

semestr zimowy 2008

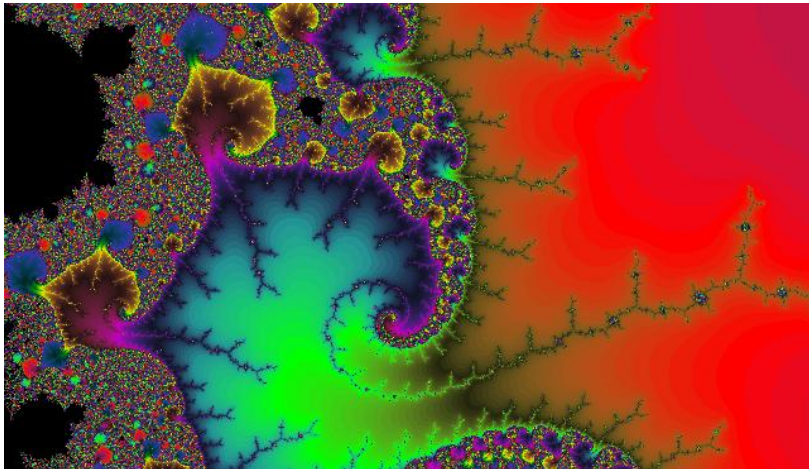
Wprowadzenie

Podejście geometryczne
Analiza graficzna
Jednoznaczność rozwiązań
Stabilność-doprecyzowanie...
Podsumowanie
Przykłady

Równania różniczkowe zwyczajne

Wprowadzenie

najprostsze możliwe...



Złe dobrego początku...

Postać ogólna równania rzędu pierwszego $f(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$.

- jeśli daje się rozwiązać ze względu na pierwsza pochodną, to $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$
- powyższe można przedstawić jako $P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0$
- rozwiązaniem w pewnym przedziale I nazywamy funkcję różniczkowalną $x = \phi(t)$ taką, że po jej podstawieniu do jednego z równań jak wyżej, przechodzi ono w tożsamość
- jeśli np. $\phi(t, x, C)$ spełnia równanie $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$, to ϕ jest rozwiązaniem (całką) ogólną tego równania
- dla konkretnego warunku początkowego rozwiązanie to przechodzi w całkę szczególną...



Wprowadzenie

Zagadnienia

- potok fazowy
- kierunki styczne
- pole kierunków stycznych
- punkty ekstremalne

Steven H. Strogatz *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Westview, (1994)

Heinz G. Schuster *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa (1995)

Herman Haken *Synergetics*, Springer, Berlin (1982)



Podejście geometryczne

- rozwiązaniu ogólnemu odpowiada "potok fazowy", z którego dla konkretnej wartości stałej C (warunki początkowe!) wybieramy pewną krzywą całkową
zagadnienie Cauchy'ego - znajdowanie rozwiązania $x = \phi(t)$ spełniającego warunek początkowy $\phi(t_0) = x_0$
- przez dowolny punkt krzywej całkowej możemy przeprowadzić prosta, która nachylona jest do osi OX pod kątem $\arctg(f(t, x))$. Zatem równanie różniczkowe określa zbiór kierunków stycznych
pole kierunków stycznych: przyporządkowanie każdemu z kierunków wektora (strzałki)



Podejście geometryczne

- punkty ekstremalne równania $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Jeśli rozwiązanie jawne $x = \phi(t)$ spełnia to równanie, w punktach ekstremalnych mamy $\frac{d\phi}{dt} = f(t, \phi(t)) = 0$, lub inaczej $f(t, x) = 0$
niech t_0 oznacza odcięte ekstremum - wówczas mówimy o maksimum, jeśli $\phi''(t_0) < 0$ oraz o minimum, jeśli $\phi''(t_0) > 0$
- **układy autonomiczne**: funkcja $f(x)$ nie zależy *explicitie* od czasu
dla układów autonomicznych: punkty stałe wyznaczone przez $x(t) = x^*$, $t \in \mathcal{R}$ są (stałymi, tj. niezależnymi od czasu) rozwiązaniami $\dot{x} = f(x)$ przy warunku $x(0) = x^*$
inaczej : punkty "równowagi"

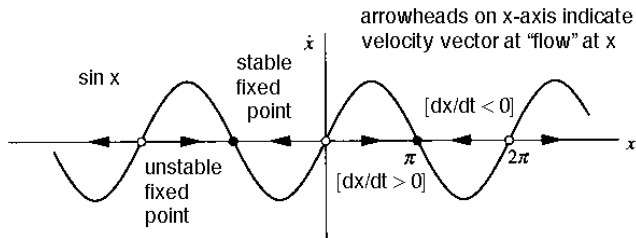


O użyteczności analizy graficznej

- rozważmy równanie nieliniowe $\dot{x} = \sin x$; niech t oznacza czas, a \dot{x} prędkość wyimaginowanej cząsteczki, która przyjmuje położenie x
potok fazowy "porusza" się w prawo jeśli $\sin(x) > 0$ (dodatnia prędkość) i w lewo, gdy $\sin x < 0$ (prędkość ujemna)
- punkty stałe $x^* = k\pi$ wyznaczone z równania $\dot{x} = 0$
- rozpatrzmy punkty stabilne i niestabilne



Graficzna analiza jakościowa



Rozwiązanie analityczne $dt = \frac{dx}{\sin x}$ dostajemy przez scałkowanie
 $t + C = -\log \left| \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right|$. Stąd jeśli

$$x(0) = x_0, \quad (1)$$

to

$$C = -\log \left| \frac{1 + \cos x_0}{\sin x_0} \right|, \quad (2)$$

albo inaczej

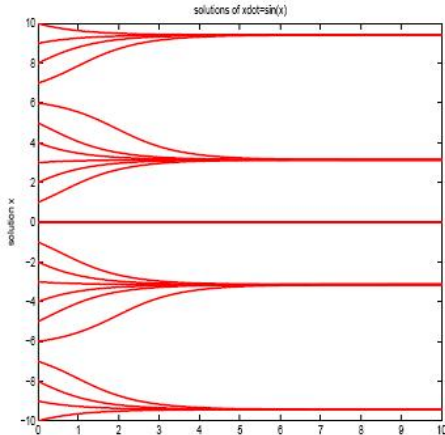
$$t = \log \left| \frac{[1 + \cos(x_0)] \sin(x)}{\sin(x_0)[1 + \cos(x)]} \right| \quad (3)$$

Z warunkiem $x_0 = \pi/3$ znajdujemy, że $x(t)$ dla $t = 12$ spełnia

$$\log \left| \frac{[1 + \cos(\pi/3)] \sin(x)}{\sin(\pi/3)[1 + \cos(x)]} \right| = 12 \quad (4)$$



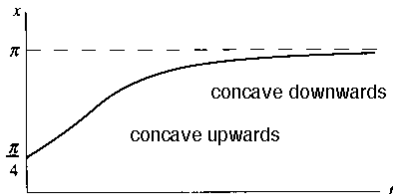
Zachowania asymptotyczne



Zachowanie "trajektorii" potoku $\dot{x} = \sin x$ dla $0 \leq t \leq 10$, zwróć uwagę na różnice w warunkach początkowych



Punkt materialny rozpoczyna ewolucję z pozycji $x_0 = \pi/4$ i porusza się coraz szybciej w prawo, aż do osiągnięcia $x = \pi/2$ (maksimum funkcji $\sin x$). Po przejściu przez ten punkt, "ruch" zostaje zwolniony i zmierza do stałego punktu stabilnego $x = \pi$.



Istnienie i jednoznaczność rozwiązań ???

- Jeśli $f(x)$ oraz $f'(x)$ są ciągłe na pewnym otwartym przedziale I osi x oraz punkt początkowy $x_0 \in I$, wówczas zagadnienie Cauchy'ego ma rozwiązanie w pewnym otoczeniu $(-\tau, \tau)$ wokół $t = 0$ i jest ono jednoznaczne. Innymi słowy: istnienie i jednoznaczność rozwiązań gwarantowane są przez dostatecznie gładkie funkcje $f(x)$.
- **Przykład:** niejednoznaczność w rozwiązaniu $\dot{x} = x^{1/3}$ przy warunku początkowym $x_0 = 0$. Poza rozwiązaniem trywialnym $x(t) = 0, \forall t$, istnieje także rozwiązanie $\frac{3}{2}x^{2/3} = t + C$, które dla $x_0 = 0$ wymusza $C = 0$
- **pole wektorowe** jest NIESTABILNE w punkcie $x^* = 0$, nachylenie $f'(0)$ jest NIESKOŃCZONE)

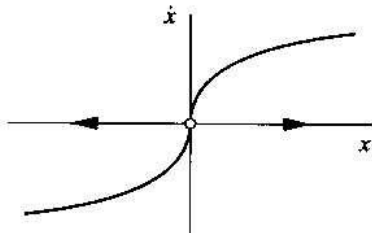


Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Przykład zachowania patologicznego

$\dot{x} = x^{1/3}$ z warunkiem początkowym $x(0) = 0$

- punkty stałe $f(x) = 0 \Rightarrow x^* = 0$
- niejednoznaczność: $x(t) = 0$ lub $x(t) = (2t/3)^{3/2}$ są rozwiązaniami tego samego równania przy identycznym warunku początkowym...
- punkt x^* jest "patologicznie" niestabilny ($f'(0) \rightarrow \infty$)



Definicja stabilności

definicje

Punkt stały x^* jest

- **przyciągający**, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych punktów startowych x_0 z otoczenia x^* : $|x_0 - x^*| \leq \delta$ zachodzi $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0$
- **asymptotycznie stabilny**, jeśli jest stabilny i przyciągający

Uwaga: istnieją przykłady punktów stabilnych, które nie są przyciągające. Podobnie, niektóre stałe punkty przyciągające mogą być niestabilne



Jak stwierdzić stabilność?

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x^* potoku $\dot{x} = f(x)$, wówczas punkt x^* jest

- stabilny (inaczej: "atraktor", "punkt przyciągający", "zlew"), jeśli $f'(x^*) < 0$
- niestabilny (inaczej "repellent", "punkt odpychający", "źródło"), jeśli $f'(x^*) > 0$



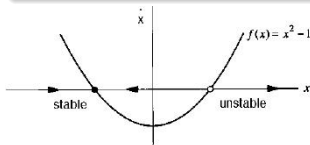
Portret fazowy

- dla 1-dim układu rozważaliśmy zachowanie wymyślnego "pływu fazowego" przemieszczającego się wzdłuż osi rzeczywistych wartości x
- znalezienie rozwiązania $\dot{x} = f(x)$ sprowadza się do obserwacji ewolucji czasowej punktu fazowego rozpoczynającego ruch w x_0 i podążającego zgodnie z kierunkiem pływu potoku fazowego
- analiza graficzna: podanie $x(t) \Leftrightarrow$ określenie trajektorii
- portret fazowy - reprezentacja wszystkich możliwych i jakościowo różnych trajektorii układu



Przykład portretu fazowego $\dot{x} = x^2 - 1$

$\eta(t) = x(t) - x^* \Rightarrow \dot{\eta} = \dot{x}$
 $\dot{\eta} = f(x) = f(x^* + \eta) =$
 $f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$
Ponieważ $f(x^*) = 0$, więc $\dot{\eta} \approx \eta f'(x^*)$
Zaburzenia $\eta(t)$ rosną lub zanikają
eksponencjalnie:
 $\eta(t) = \text{const} \times \exp(f'(x^*)t)$



- punkty stałe:
 $\dot{x} = 0 \Rightarrow (x^* + 1)(x^* - 1) = 0$,
zatem $x^* \pm 1$
- stabilność określamy na podstawie szkicu pola wektorowego
- definicja stabilności punktów równowagowych bazuje na określeniu zachowania punktu stałego pod wpływem niewielkich "zaburzeń".
Stąd $x^* = -1$ jest **lokalnie** ale nie **globalnie** stabilny



Modele wzrostu populacji

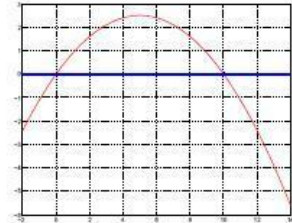
Równanie Verhulsta jest przykładem ciągłego równania logistycznego:

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{\alpha}\right) = f(N)$$

$N(t)$ oznacza liczebność populacji w czasie t , r jest szybkością namnażania się osobników ($r > 0$), α wyznacza górną granicę wzrostu (pojemność populacji).



- $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow N(t) \propto e^{rt}$ - populacja wzrasta nieograniczenie
- stabilny punkt równowagi dla $N = K$: małe odstępstwa od $N = \alpha$ gasną i $N(t) \rightarrow \alpha$ dla $t \rightarrow \infty$
- niestabilny punkt równowagi $N = 0$: małe zaburzenia rosną eksponencjalnie szybko oddalając się od $N = 0$



Funkcja $f(N)$ dla $r = 1$ oraz $\alpha = 10$.

Stany stacjonarne $N^* = 0, \alpha$

$f'(N) = r - \frac{2rN}{\alpha} = r > 0$ dla $N^* = 0$ oraz

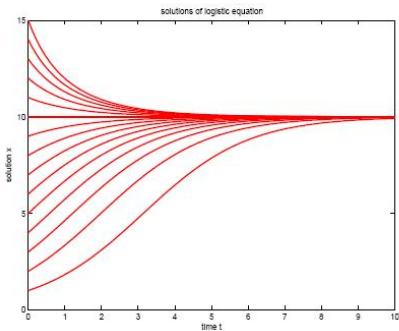
$f'(N = \alpha) = -r$.

Wniosek: $N^* = \alpha$ - punkt stabilny,

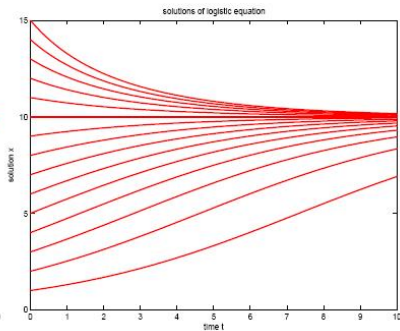
$N^* = 0$ - punkt niestabilny.



Portret fazowy, trajektoria, rozwiązanie...



$$r = .8, \alpha = 10$$



$$r = .2, \alpha = 10$$



Rozwiązanie analityczne $\dot{N} = rN(1 - N/\alpha)$

Separacja zmiennych:

$$\frac{\dot{N}}{N(1 - N/\alpha)} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{N}}{(\alpha - N)} = r$$

Po scałkowaniu dostajemy

$$\log(|N|) - \log(|\alpha - N|) = rt + C$$

lub

$$|N|/|\alpha - N| = C'e^{rt}$$

skąd, po ustaleniu $N_0 = N(0) \Rightarrow C' = N_0/(\alpha - N_0)$,

$$N(t) = \frac{\alpha N_0}{N_0 + (\alpha - N_0) \exp(-rt)}$$



Luźne uwagi i obserwacje...

- W przypadku 1-dim pól wektorowych zdefiniowanych na \mathcal{R} , dynamika układów jest zdominowana obecnością punktów stacjonarnych (trajektorie albo zbiegają się do tych punktów, albo rozjeżdżają do $\mp\infty$)
- Inaczej: w trakcie ewolucji punkty fazowe nie zmieniają kierunku (na przeciwny) - trajektorie mogą jedynie monotonicznie wzrastać, maleć bądź pozostać stałe
- Zmierzanie do stanów stacjonarnych jest monotoniczne
- W układach 1-dim **niemożliwe są rozwiązania periodyczne**



Analiza potencjału

Definicja

Funkcja $V(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywana jest potencjałem, jeśli potok $\dot{x} = f(x)$ zadany jest przez $f = -\frac{dV}{dx}$.

Zauważmy że:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = -f^2(x)$$

czyli $V(x(t))$ maleje wzdłuż trajektorii



Analiza potencjału

Twierdzenie

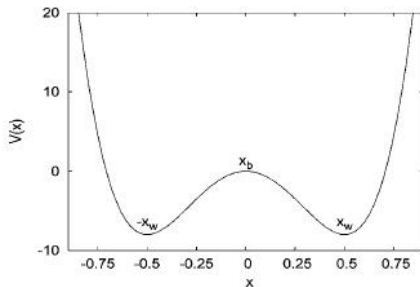
Jeśli $V(x)$ jest potencjałem potoku $\dot{x} = f(x)$, to

- $V(x(t))$ jest nierosnąca wzdłuż rozwiązań
- punkt x^* jest lokalnym minimum $V \Leftrightarrow x^*$ jest stabilnym punktem stacjonarnym
- punkt x^* jest lokalnym maksimum $V \Leftrightarrow x^*$ jest niestabilnym punktem stacjonarnym

Wniosek: stabilność punktów stacjonarnych przekształcenia $f(x)$ może być odczytana z graficznego obrazu potencjału $V(x)$



Analiza potencjału



Przykład potencjału "dwudołkowego".

O układzie tym mówimy, że jest dwustabilny (posiada dwa stabilne stany "równowagowe").



Wprowadzenie
Podejście geometryczne
Analiza graficzna
Jednoznaczność rozwiązań
Stabilność-doprecyzowanie...
Podsumowanie
Przykłady

Model Verhulsta (1804-1849)
Stabilność i potencjał



$$m\ddot{x} = F(x) - \gamma\dot{x}$$

- sprowadza się do układu równań różniczkowych zwyczajnych (pierwszego rzędu):
 - $\dot{x} = v$
 - $\dot{v} = m^{-1}F(x) - \gamma m^{-1}v$
- jeśli tłumienie jest mocne ($\gamma\dot{x} \gg m\ddot{x}$)
to $\dot{v} \approx 0$, co w konsekwencji prowadzi do $\dot{x} = \gamma^{-1}F(x) = f(x)$
dla czasów dłuższych od czasu dochodzenia $v(t)$
do wartości stacjonarnej v^* ($t \gg 1/\gamma$)
- zakładamy, że "siły" $F(x)$ mają pochodzenie potencjalne...



Wprowadzenie
Podejście geometryczne
Analiza graficzna
Jednoznaczność rozwiązań
Stabilność-doprecyzowanie...
Podsumowanie
Przykłady

Model Verhulsta (1804-1849)
Stabilność i potencjał

