

# Silnie zwyrodniałe gazy kwantowe

Statystyka  
nieoddziaływujących  
gazów Bosego:  
kondensacja Bosego-  
Einsteina

## Silnie zwyrodniały gaz bozonów o niezerowej masie spoczynkowej

Gdy liczba cząstek nie jest zachowywana, termodynamika nieoddziaływujących bozonów jest bardzo prosta bo znika potencjał chemiczny (patrz termodynamika fotonów )

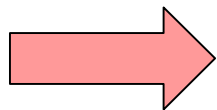
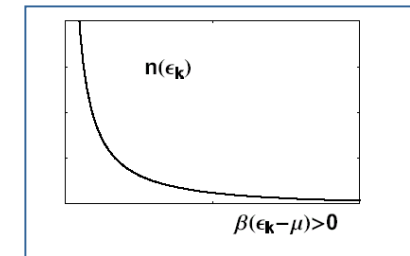
Jednak w układzie z **ustaloną liczbą cząstek** (w naszym przypadku – „średniej liczby cząstek”) ten, jakby się wydawało `niewinny formalizm’ prowadzi do niezwykłych przewidywań, nie mających odpowiedników dla fermionów, czy fizyki klasycznej.

Założmy, że degeneracja związana ze spinem wynosi

$$g(\epsilon_k) \equiv \sigma = 2s + 1 \quad (s : \text{spin bosonu}).$$

oczywiście

$$n(\epsilon_k) = \frac{g(\epsilon_k)}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \geq 0 \quad (\text{zawsze!}).$$



$$\mu \leq \epsilon_{min} (\equiv 0)$$

Zatem przy założeniu  $\epsilon_{min} = 0$  dostajemy dla bosonów

$$\mu \leq 0 \quad \text{zawsze!}$$

PRZYPOMNIENIE zliczania stanów w przypadku gęsto położonych poziomów energetycznych

$$D(k) dk = \sigma \int_V \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x}}{h^3} = \frac{V\sigma}{2\pi^2} k^2 dk$$

$$\epsilon_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\xi = \exp(\mu/k_B T)$$

$$n(\epsilon_k) \simeq g(\epsilon_k) e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}$$

stąd

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\epsilon_k} n(\epsilon_k) = \sum_{\epsilon_k} g(\epsilon_k) e^{-\beta\epsilon_k} \underbrace{e^{\beta\mu}}_{\xi} = \dots \text{ dla gęsto położonych poziomów} \\ &= \sigma \int \frac{d^3p d^3x}{h^3} e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} \xi_0 \quad (\xi_0: \text{wartość } \xi \text{ w przybliżeniu klasycznym}) \end{aligned}$$

$$= \sigma h^{-3} V \xi_0 \pi^{3/2} (2mk_B T)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \xi_0 = \frac{N(h^{3/2})^2}{\sigma V \pi^{3/2} (2mk_B T)^{3/2}} = \frac{N \lambda_T^3}{V \sigma} = \frac{\lambda_T^3}{\tilde{v} \sigma},$$

$$\Rightarrow \xi_0 = \frac{N(h^{3/2})^2}{\sigma V \pi^{3/2} (2mk_B T)^{3/2}} = \frac{N\lambda_T^3}{V\sigma} = \frac{\lambda_T^3}{\tilde{v}\sigma},$$

gdzie  $\tilde{v} = V/N$  jest średnią objętością na cząstkę, a  $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$  ma wymiar długości i może być interpretowana jako kwantowo-mechaniczna długość fali cząstki o energii kinetycznej  $k_B T$  ( $\{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = k_B T, \lambda = 2\pi/k\} \Rightarrow \lambda_T^2 \propto k^{-2} \propto \hbar^2/2\pi mk_B T$ ) - lub temperaturowe rozmycie pakietu falowego. Stąd

$$\xi_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda_T^3}{\tilde{v}} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_T < l = (\tilde{v})^{1/3},$$

co oznacza, że dla gazu niezwyrodniałego (w obszarze klasycznym) średnie rozmycie

pakietu falowego musi być mniejsze niż średnia odległość między cząstkami.

## Dyskusja wzoru na $\xi_0$

$$\xi_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda_T^3}{\tilde{v}}$$

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

$$\tilde{v} = V/N$$

Wygodniej odnieść się do jednostek atomowych

$M \stackrel{df}{=} m/m_p$ ,  $m_p = 1.672 \times 10^{-24} \text{g}$  - masa protonu. , wtedy

$$\lambda_T \simeq 1.75 / \sqrt{MT} \text{ [nm]} \quad (T \text{ w Kelwinach})$$

$$\lambda_T \simeq 1.75/\sqrt{MT} [nm] \quad (T \text{ w Kelwinach})$$

gaz w warunkach normalnych:  $T \sim 300 K$ ,  $p \sim 1 \text{ Atm} \rightarrow V/N \sim 37 \text{ nm}^3$ .

$$\xi_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda_T^3}{\tilde{v}} \simeq \frac{1}{\sigma} \frac{(1.75)^3}{37 \cdot (300)^{3/2}} M^{-3/2} \simeq \frac{1}{\sigma} 3 \cdot 10^{-5} M^{-3/2} \ll 1 \quad (\sigma, M \geq 1)$$

elektrony w tych samych warunkach: biorąc  $M \sim 10^{-3}$ ,  $\tilde{v} = (0.25 \text{ nm})^3$ , otrzymamy  $\xi_0 \sim \frac{8.5 \cdot 10^4}{T^{3/2} \tilde{v}} \sim 10^3$ . Stąd wynika, że elektrony w temperaturach pokojowych są gazem silnie zwyrodniałym i nie można zaniedbać efektów kwantowych.



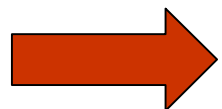
# Poprawki od statystyk kwantowych

Jeśli  $\xi \ll 1$ , wtedy trzeba liczyć wielkości termodynamiczne z uwzględnieniem statystyk kwantowych. W tym celu musimy najpierw wyliczyć potencjał chemiczny  $\mu$  lub, równoważnie,  $\xi = e^{\beta\mu}$ . Tutaj wyznaczymy  $\xi$  jako rozwinięcie wokół  $\xi_0$ . Naszą formułą startową będzie,

jak poprzednio, wyrażenie na średnia liczbę cząstek w układzie

$$N = \sum_k n(\epsilon_k) = \sum_k \frac{g(\epsilon_k)}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g(\epsilon_k) e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}} = \sum_k \frac{g(\epsilon_k) e^{-\beta\epsilon_k} \xi}{1 \pm e^{-\beta\epsilon_k} \xi}$$

.... Szczegóły rozwinięcia



$$\xi = \xi_0 \left( 1 \pm 2^{-3/2} \xi_0 + \left( \frac{1}{4} - 3^{-3/2} \right) \xi_0^2 + \dots \right)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda_T^3}{(V/N)}$$

$$\xi = \xi_0 \left( 1 \pm 2^{-3/2} \xi_0 + \left( \frac{1}{4} - 3^{-3/2} \right) \xi_0^2 + \dots \right)$$

Dowód:

$$N = \sum_k n(\epsilon_k) = \sum_k \frac{g(\epsilon_k)}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g(\epsilon_k) e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}} = \sum_k \frac{g(\epsilon_k) e^{-\beta \epsilon_k \xi}}{1 \pm e^{-\beta \epsilon_k \xi}}$$

... rozwijamy wyrażenie w szereg w  $\xi$  wokół  $\xi = 0$ ;

rachunki prowadzimy zakładając gęsto rozłożone poziomy

$$\simeq \sigma h^{-3} \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \mp e^{-p^2/2mk_B T} \xi \right]^{n+1} = \frac{V \sigma}{\lambda_T^3} \xi (1 \mp 2^{-3/2} \xi + 3^{-3/2} \xi^2 \mp \dots)$$

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

Pamiętając, że  $\xi_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda_T^3}{(V/N)}$  otrzymamy

$$\xi_0 = \xi (1 \mp 2^{-3/2} \xi + 3^{-3/2} \xi^2 \mp \dots).$$

Szereg powyższy można odwrócić wyraz po wyrazie<sup>2</sup> wokół  $\xi = \xi_0 = 0$ , co prowadzi do<sup>3</sup>

$$\xi = \xi_0 \left( 1 \pm 2^{-3/2} \xi_0 + \left( \frac{1}{4} - 3^{-3/2} \right) \xi_0^2 + \dots \right).$$

---

<sup>2</sup>Jeśli  $\xi_0 = \sum_n a_n \xi^n$ , wtedy  $\xi = \sum_{k=1} b_k (\xi_0 - a_0)^k$ , gdzie  $a_0 = \xi_0|_{\xi=0}$ .

Współczynniki  $b_k$  otrzymujemy

różniczkując sukcesywnie  $\xi_0 - a_0$  po  $\xi$ :

$$b_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \xi}{\partial (\xi_0 - a_0)^k} \right|_{\xi_0 = a_0} = 1 / \left. \frac{\partial^k (\xi_0 - a_0)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi: \xi_0 = a_0}$$

<sup>3</sup>Współczynniki  $\{b_k\}$  wyliczamy różniczkując systematycznie  $\xi_0 = \xi_0(\xi)$  ( $a_0 = 0$ ):

$$1) \quad b_1 : \frac{\partial}{\partial \xi_0} [\xi_0 = \sum_n a_n \xi^n]_{\xi_0 \equiv \xi=0}$$

$$a) \quad 1 = \sum_{n=1} a_n n \xi^{n-1} \left. \frac{d\xi}{d\xi_0} \right|_{\xi=0}$$

$$b) \quad 1 = a_1 \left. \frac{d\xi}{d\xi_0} \right|_{\xi=0} = a_1 b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$$

$$2) \quad b_1 : \frac{\partial}{\partial \xi_0} (1a)_{\xi=0}$$

$$0 = \sum_{n=2} a_n n(n-1) \xi^{n-2} \left. \frac{d\xi}{d\xi_0} \right|_{\xi=0} + \sum_{n=1} a_n n \xi^{n-1} \left. \frac{d^2 \xi}{d\xi_0^2} \right|_{\xi=0} = a_2 \cdot 2b_1 + a_1 2!b_2$$

$$\Rightarrow \quad b_2 = -\frac{a_2 \cdot 2b_1}{2!} = \pm 2^{-3/2} \quad itd.$$

$$-\Xi \equiv -\Xi(V, T, \mu) = pV = \underbrace{Nk_B T}_{\substack{\downarrow \\ \text{klasyczna} \\ \text{wartość}}} \left[ \underbrace{1 \pm \left( \frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{2^{5/2}} \right)}_{\substack{\text{poprawki kwantowe} \\ \text{związane ze statystyką}}} \xi_0 + \dots \right]$$

## Dowód

$$\begin{aligned} -\Xi &\equiv -\Xi(V, T, \mu) = pV = k_B T \ln Z_G = \pm k_B T \sum_{\tau} \ln \left( 1 \pm \xi e^{-\beta \epsilon_{\tau}} \right) \\ &= \dots \ln(1 \pm x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n \frac{x^n}{n} \dots \\ &\simeq \mp k_B T \sigma V h^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^n}{n} \int d^3 \mathbf{p} \left( \xi e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} \right)^n \\ &= k_B T \sigma V h^{-3} (2\pi m k_B T)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n^{5/2}} \xi^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_B T N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n^{5/2}} \xi_0^{-1} \xi^n \simeq N k_B T \left[ \xi_0^{-1} \xi \mp \frac{\xi_0^{-1} \xi^2}{2^{5/2}} + \dots \right] \\
&\simeq N k_B T \left[ \xi_0^{-1} \xi_0 (1 \pm 2^{-3/2} \xi_0 + \dots) \mp \frac{\xi_0^{-1} \xi_0^2 (1 + \dots)}{2^{5/2}} + \dots \right]
\end{aligned}$$

$\sim 0.177$

$$= \underbrace{N k_B T}_{\text{klasyczna wartość}} \left[ 1 \pm \underbrace{\left( \frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{2^{5/2}} \right)}_{\text{poprawki kwantowe związane ze statystyką}} \xi_0 + \dots \right].$$

↓  
klasyczna  
wartość

poprawki kwantowe  
związane ze statystyką

**Ponadto ostatnim razem pokazaliśmy, że dla nierelatywistycznych bozonów i fermionów zachodzi**

$$pV = \frac{2}{3}E$$

**Uwaga 1** Wynik powyższy jest konsystentny z równaniami dla klasycznego gazu doskonałego!:

$pV = Nk_B T$ ,  $E = \frac{3}{2}Nk_B T$ . Jednak w przypadku kwantowym zarówno  $E$  jak i  $p$  zależą przez potencjał chemiczny w nietrywialny sposób od gęstości i temperatury.

**Uwaga 2** W przypadku ultrarelatywistycznym (*np.* dla fotonów)

$$pV = \frac{2}{3}E \quad \Rightarrow \quad pV = \frac{1}{3}E.$$

Przejdziemy obecnie do przybliżonych rachunków dla fermionów i bozonów

Znając  $\mu$  ( $\equiv \xi$ ) możemy wyliczyć pozostałe funkcje termodynamiczne.

Na przykład

$$-\Xi \equiv -\Xi(V, T, \mu) = pV = k_B T \ln Z_G = \pm k_B T \sum_{\tau} \ln \left( 1 \pm \xi e^{-\beta \epsilon_{\tau}} \right)$$

$$= \underbrace{N k_B T}_{\substack{\downarrow \\ \text{klasyczna} \\ \text{wartość}}} \left[ 1 \pm \overbrace{\left( \frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{2^{5/2}} \right)}^{\sim 0.177} \xi_0 + \dots \right].$$

poprawki kwantowe  
związane ze statystyką

wyprowadzenie  
w dodatku



## Otrzymaliśmy bardzo ważny wynik

$$pV \simeq Nk_B T [1 \pm 0.177\xi_0 + \dots] \quad \text{gdzie } + \text{ odnosi się do fermionów}$$

– odnosi się do bosonów

$$U = \frac{3}{2}pV \quad (\text{klasycznie } U = U(T)!; \quad \text{kwantowo } U(T, V)!).$$

### wnioski

Ciśnienie i energia wewnętrzna dla fermionów są większe niż ich wartości klasyczne. Mamy więc coś w rodzaju efektywnego "kwantowego" odpychania w gazie nieoddziaływujących fermionów. Jest to związane z zakazem Pauliego.

Bosony zachowują się inaczej. Ciśnienie i energia wewnętrzna są tutaj mniejsze niż ich wartości klasyczne. Mamy zatem efektywne "kwantowe" przyciąganie w

gazie nieoddziaływujących bosonów. W przypadku gdy  $\xi \rightarrow 1$  (dla bosonów  $\xi$  nie może być większe od 1, bo szereg nie byłby zbieżny) przyciąganie to prowadzi do kondensacji Bosego-Einsteina.

Efekty powyższe można łatwo pomierzyć wyznaczając  $p(V, T)$ . Dla lekkich gazów takich jak neon czy argon poprawki te w niskich temperaturach są między 15% a 4%.

Dla ciekłego helu i stałego wodoru w niskich temperaturach (ok. 2K) rozwinięcie wokół  $\xi = 0$  jest rozbieżne. Zatem gdy efekty kwantowe są duże nie wystarczy liczyć poprawek do funkcji klasycznych. Stosuje się wtedy rozwinięcie asymptotyczne wokół  $T = 0$ . Rachunki są trudne ze względu na konieczność wyznaczenia potencjału chemicznego.

Potencjał chemiczny wyliczymy, jak zwykle, z warunku na  $N$ :

$$N = \sum_k n(\epsilon_k) = \sum_k \frac{\sigma}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} = \frac{2\pi\sigma V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

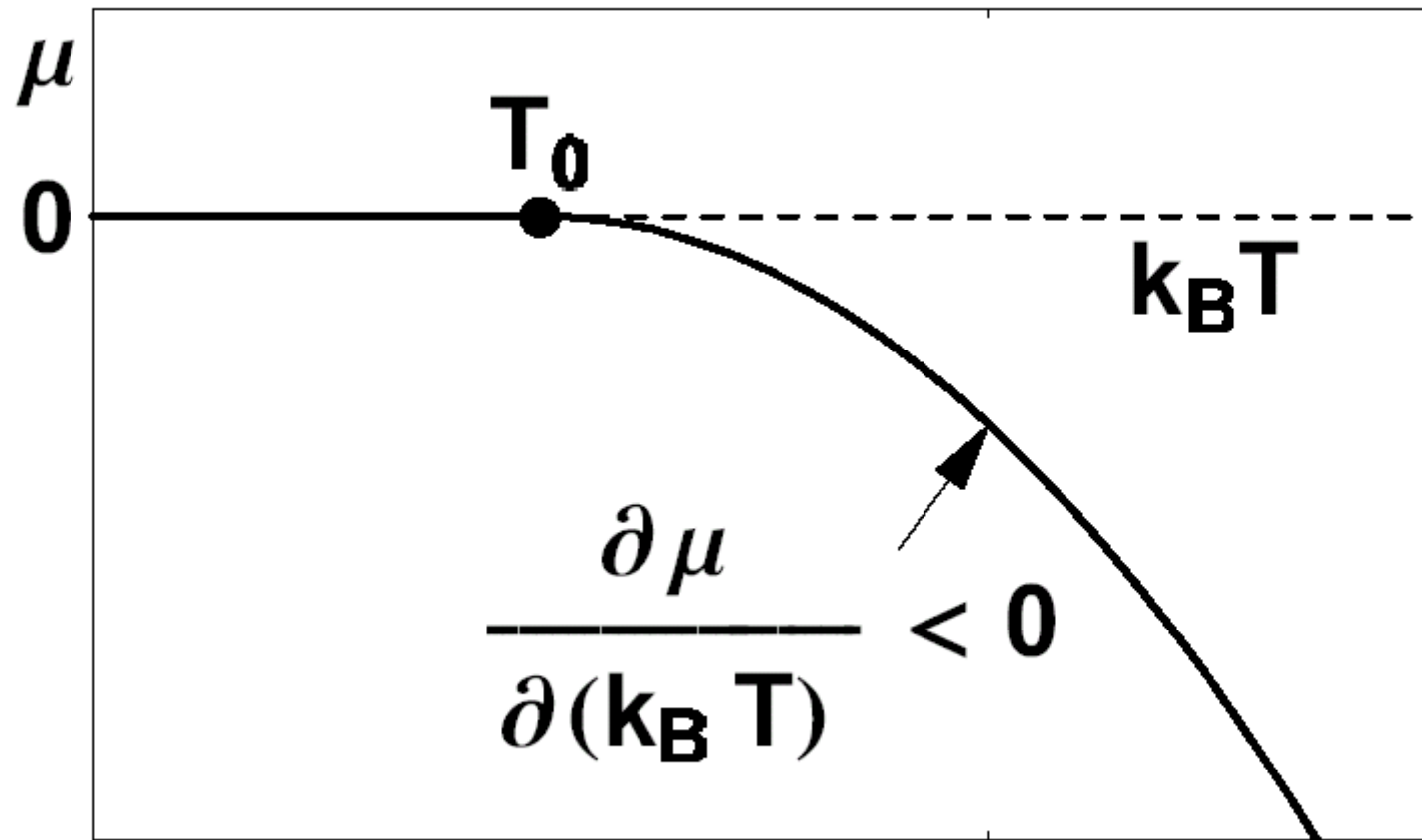
Zauważmy, że  $\mu$  rośnie z malejącą temperaturą. Aby to zobaczyć wystarczy zróżniczkować funkcję uwikłaną  $N/V = \rho(\mu, k_B T)$  po temperaturze

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k_B T} + \frac{\partial \rho}{\partial k_B T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial k_B T} = - \frac{\frac{\partial \rho}{\partial k_B T}}{\frac{\partial \rho}{\partial \mu}}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial (k_B T)} = - \frac{\int_0^\infty \frac{\epsilon - \mu}{(k_B T)^2} \frac{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \sqrt{\epsilon} d\epsilon}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1)^2}}{\int_0^\infty \frac{1}{k_B T} \frac{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \sqrt{\epsilon} d\epsilon}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1)^2}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial (k_B T)} < 0$$

Stąd wnioskujemy, że jeśli dla danego układu znajdziemy dodatnią temperaturę  $T_0$  dla której  $\mu(T_0) = 0$ , wtedy  $\mu = 0$  dla wszystkich temperatur  $T < T_0$ .

...potencjał chemiczny rośnie z malejącą temperaturą...

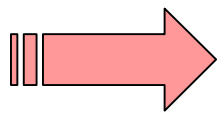


Istotnie, taka temperatura  $T_0$  istnieje i można ją wyznaczyć kładąc  $\mu = 0$  we wzorze

$$N = \sum_k n(\epsilon_k) = \sum_k \frac{\sigma}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} = \frac{2\pi\sigma V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}.$$

$$N(T, V, z) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sigma \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} - 1} + \frac{z}{1 - z}$$

$$\begin{aligned} \rho &= N/V = \frac{2\pi\sigma}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/k_B T_0} - 1} \\ &= 2\pi\sigma \left( \frac{2mk_B T_0}{h^2} \right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}}_{\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \simeq 2.31} \end{aligned}$$



$$k_B T_0 \simeq \frac{3.32 \hbar^2}{\sigma^{2/3} m} \rho^{2/3} > 0.$$

$z = \exp\{\beta\mu\}$  - tzw.  
parametr  
zwyrodnienia

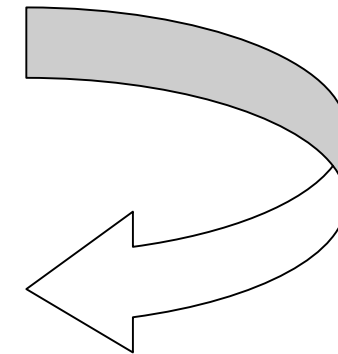
Jak wcześniej ustaliliśmy  $\mu = 0$  dla  $T_0 > 0$  oznacza  $\mu = 0 \forall T < T_0$ . Lecz przy  $T < T_0$ , warunek na  $N$  może być spełniony tylko dla **mniejszej liczby cząstek**

$$\begin{aligned} \rho &= N/V = \frac{2\pi\sigma}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/k_B T_0} - 1} \\ &= 2\pi\sigma \left( \frac{2mk_B T_0}{h^2} \right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}}_{\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \simeq 2.31} \end{aligned}$$

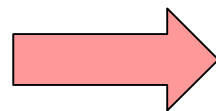
$$g_n(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} \exp\{x\} - 1}$$

$$0 \leq z \leq 1$$

$$n \in R$$

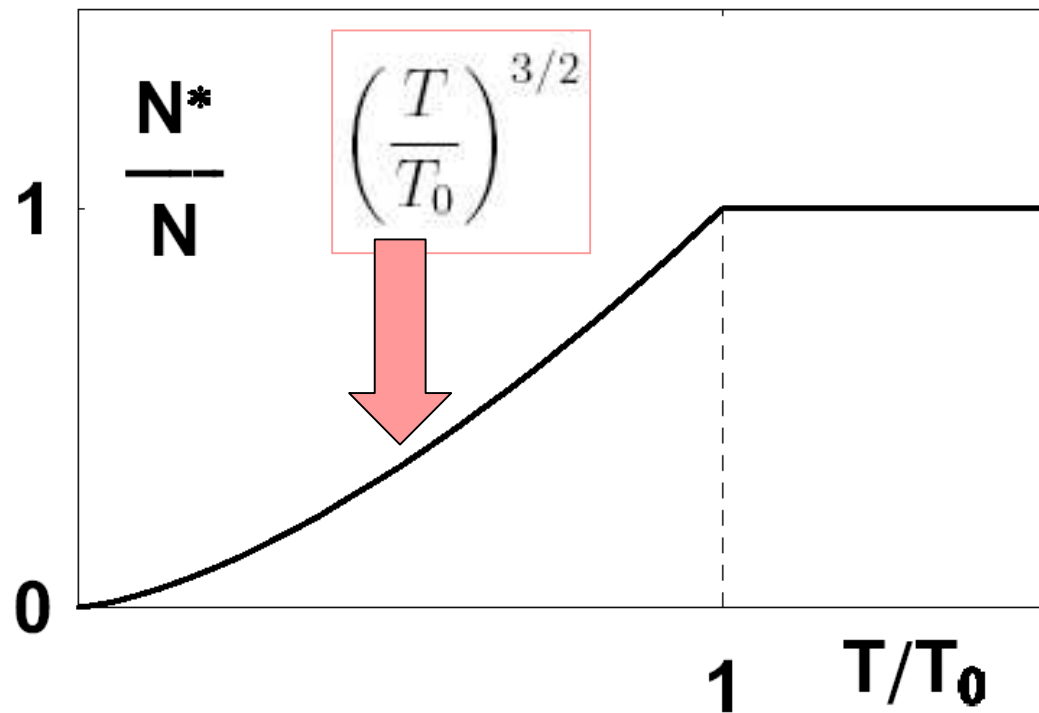


$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{z}{1-z} = N^* + N_0$$

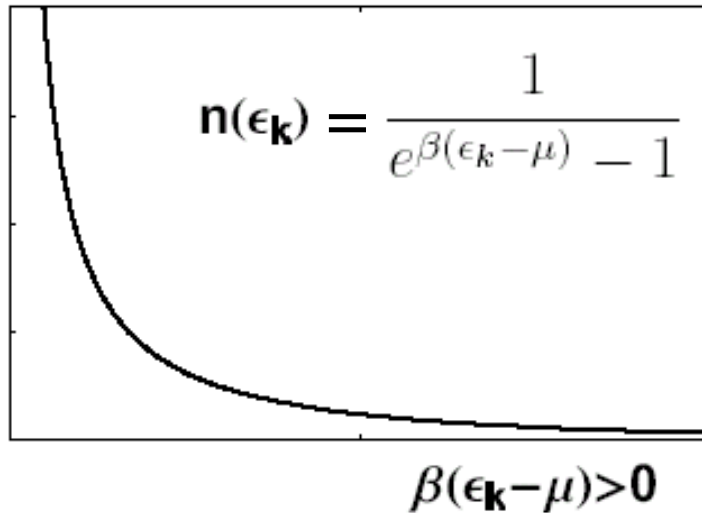


$$N^*(T) = \begin{cases} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} N & (T < T_0) \\ N & (T \geq T_0) \end{cases}$$

$$N^*(T) = \begin{cases} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} N & (T < T_0) \\ N & (T \geq T_0) \end{cases}$$



Średnia liczba cząsteczek zachowana – różnica między  $N$  i  $N^*$  obsadza stan podstawowy.



Dla bozonów zawsze:

$$\mu < \epsilon_0$$

Zatem  $n$  może być dowolnie duże jeśli różnica  $\epsilon_0 - \mu \approx 0$

$$n(\epsilon_0) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} \approx \frac{1}{\beta(\epsilon_0 - \mu)} \ggg 1$$

W szczególności  $n(\epsilon_0)$  może być rzędu  $\mathcal{O}(N)$ , gdy  $\beta(\epsilon_0 - \mu) \sim \mathcal{O}(N^{-1})$

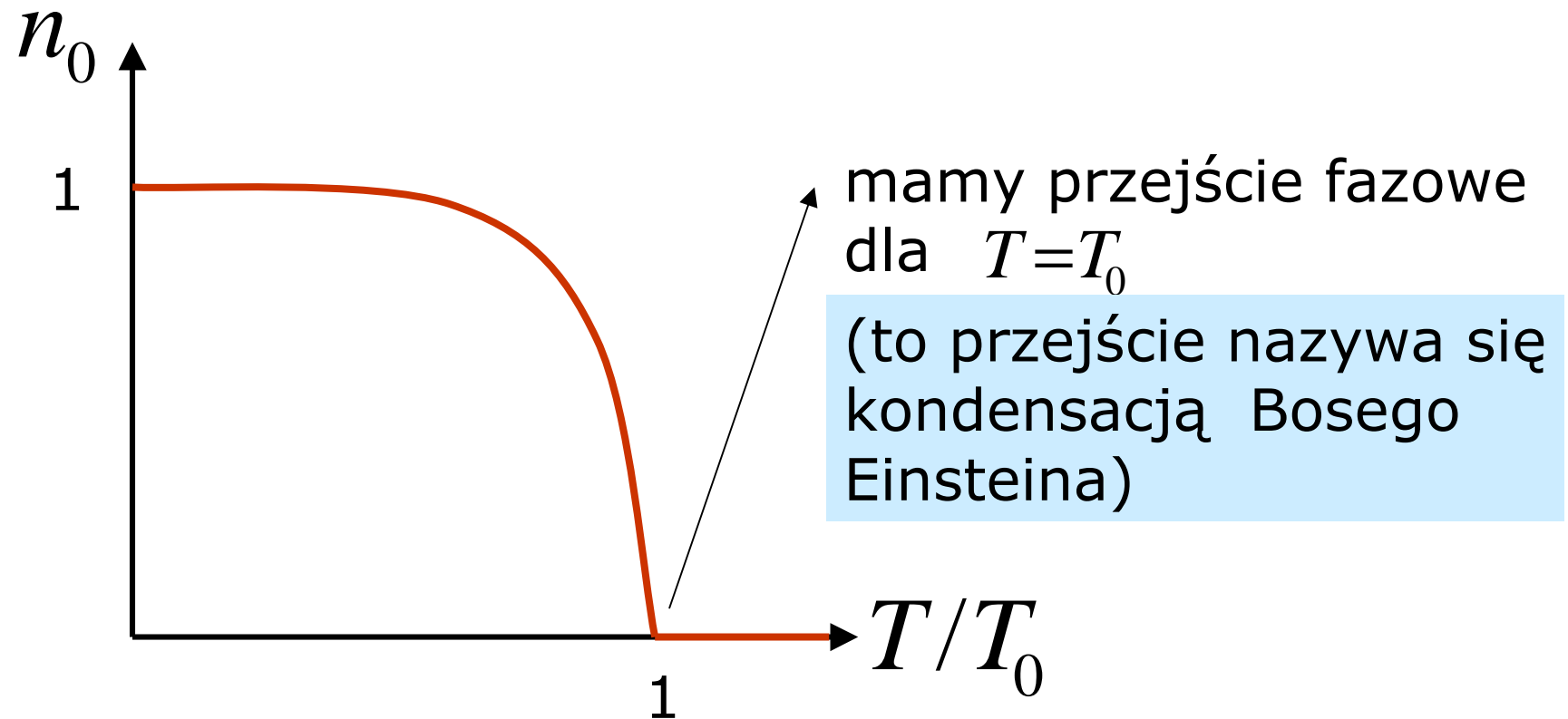
Jest to odzwierciedleniem faktu, że nic nie stoi na przeszkodzie aby wszystkie bosony były w stanie o minimum energii. Dla bosonów nie ma bowiem zasady wykluczania jak w przypadku fermionów. Z drugiej strony, w przybliżeniu ciągłym, przyczynek do  $N$  wokół stanu podstawowego jest rzędu:

$$\tilde{n}_0 \sim V \int_0^{\epsilon_1} \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \stackrel{\epsilon_1: \text{pierwszy stan wzbudzony}}{\simeq} V \int_0^{\epsilon_1} \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{\beta(\epsilon - \mu)} \lesssim V \int_0^{\epsilon_1} \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{\beta\epsilon} \sim V \epsilon_1^{1/2}.$$



$$n_0 = \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right], \quad T < T_0$$

$$= 0, \quad T > T_0$$

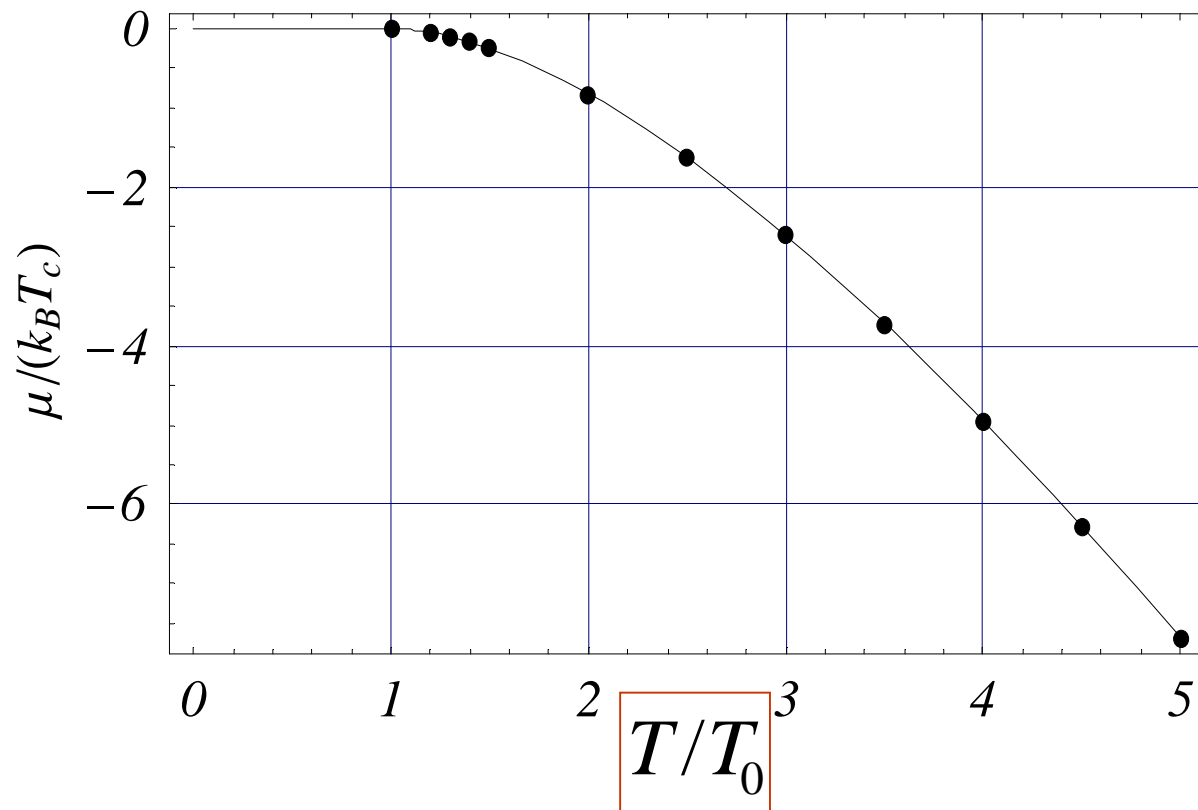


Jest to "kondensacja" molekuł w stanie podstawowym o pędzie  $k=0$

# Funkcje termodynamiczne kondensatu

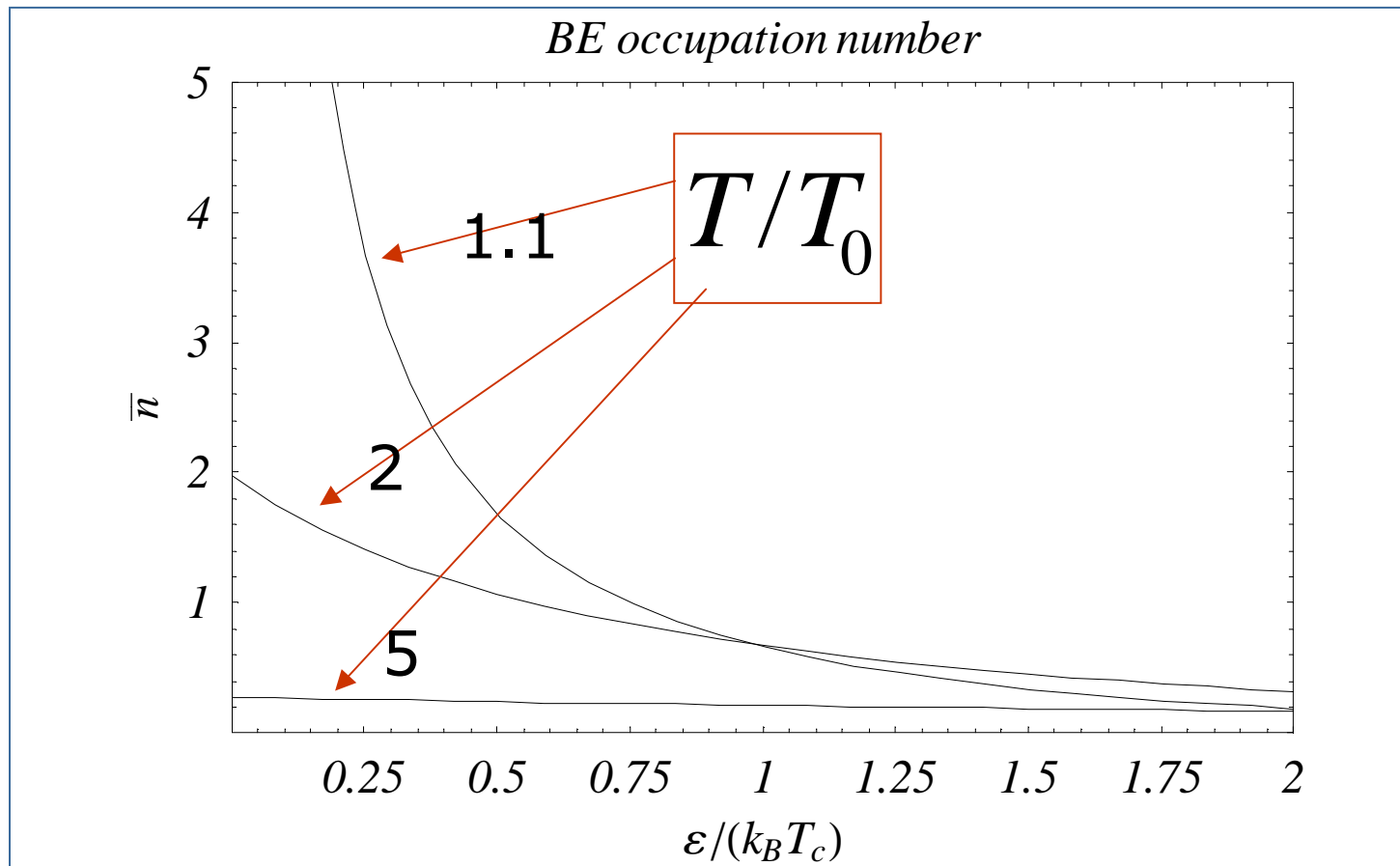
$$\rho = \frac{N}{V} = 2 \pi \sigma \left( \frac{2 m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x-\beta\mu} - 1} dx$$

*BE chemical potential*



# Obsadzenia poziomów w f-cji energii

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$



# Energia wewnętrzna

$$E \equiv U = \underbrace{\sum_{\mathbf{k}} n(\epsilon_{\mathbf{k}}) \epsilon_{\mathbf{k}}}$$

Przyczynęk dają jedynie cząstki o energii  $> 0$

$$= \frac{2 \pi \sigma V}{h^3} (2 m)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{(\epsilon - \mu) \beta} - 1} d\epsilon$$

$$= \frac{2 \pi \sigma V}{h^3} (2 m)^{3/2} (k_B T)^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{e^{x - \beta \mu} - 1} dx$$

$$\sim V T^{5/2} \quad (\text{dla } T \leq T_0)$$

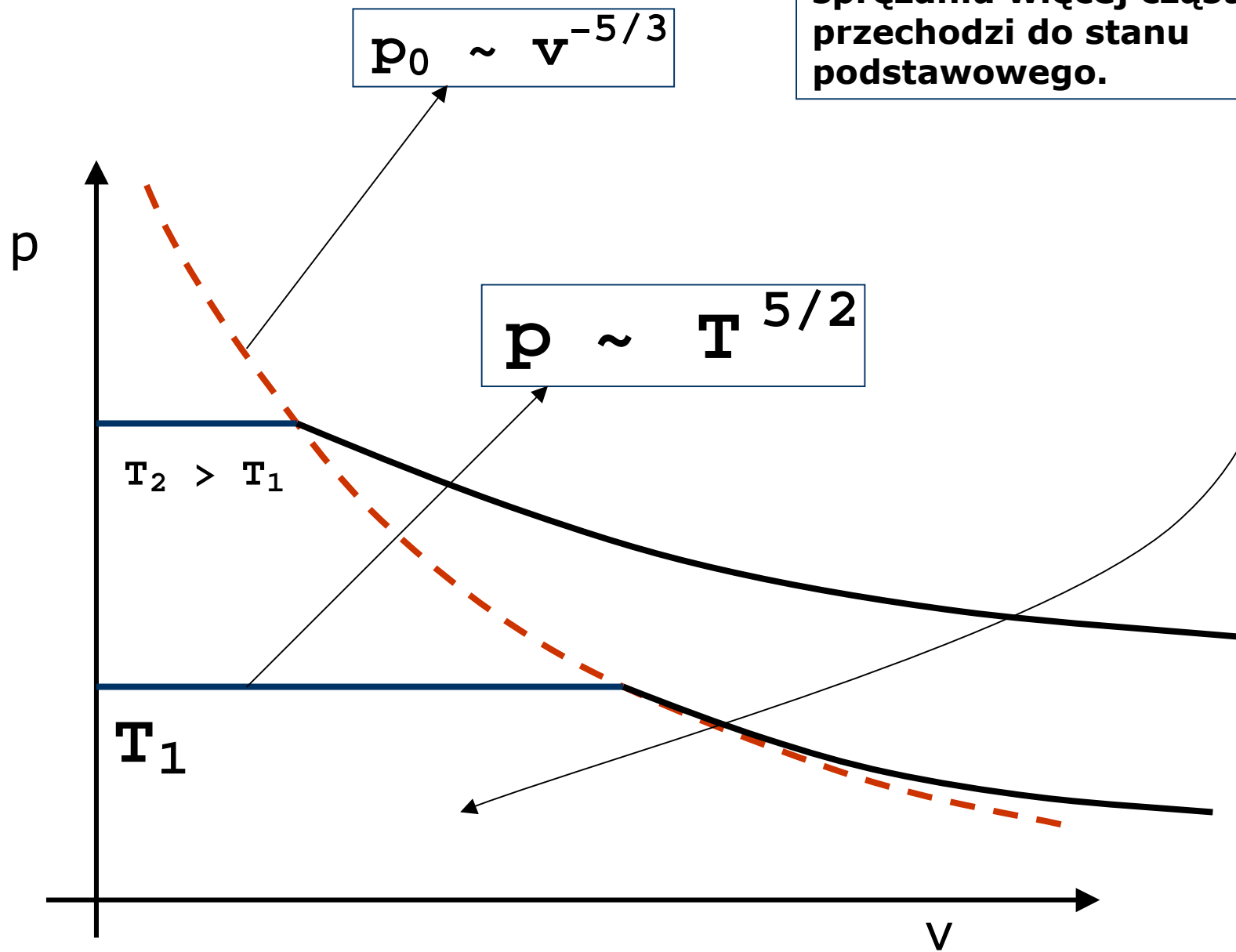
# Równanie stanu

$$p = \frac{2}{3} \left( \frac{2 \pi \sigma}{h^3} (2 m)^{3/2} (k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{x-\beta\mu} - 1} dx \right)$$

$$\sim T^{5/2} \quad (\text{dla } T \leq T_0; \text{ niezależnie od } V !)$$

$$\rho = \frac{N}{V} = 2 \pi \sigma \left( \frac{2 m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x-\beta\mu} - 1} dx$$

cząstki o zerowym pędzie  
nie wywierają ciśnienia; przy  
sprężaniu więcej cząstek  
przechodzi do stanu  
podstawowego.



$$p_0 \sim v^{-5/3}$$

$$p \sim T^{5/2}$$

$T_2 > T_1$

$T_1$

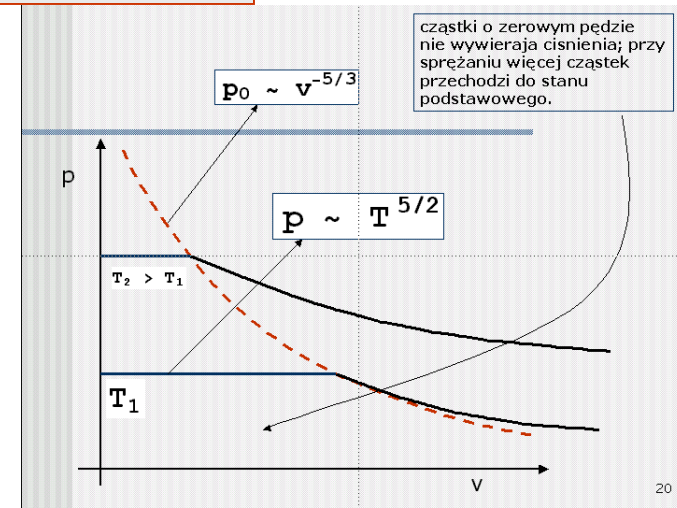
$v$

$p$

KBE jest przejściem I-szego rodzaju

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{wzdłuż krz. współ.}} = \frac{\Delta H}{T_0 \Delta V} \quad (\text{r. Clapeyrona})$$

$$\Rightarrow \Delta H \neq 0$$



Jest to dosyć niezwykle przejście fazowe I-szego Rodzaju - układ ma jednorodną makroskopową gęstość, a nie dwie różne gęstości jak np. dla cieczy i gazu

Kondensacja zachodzi w przestrzeni pędów: wszystkie cząsteczki kondensatu mają zerowy pęd.

# Ciepło właściwe

$$c_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \sim T^{3/2} \quad T < T_0$$

$$C_V (T = T_0) \approx 1.925 k_B N > \frac{3}{2} k_B N \quad (T \rightarrow \infty)$$

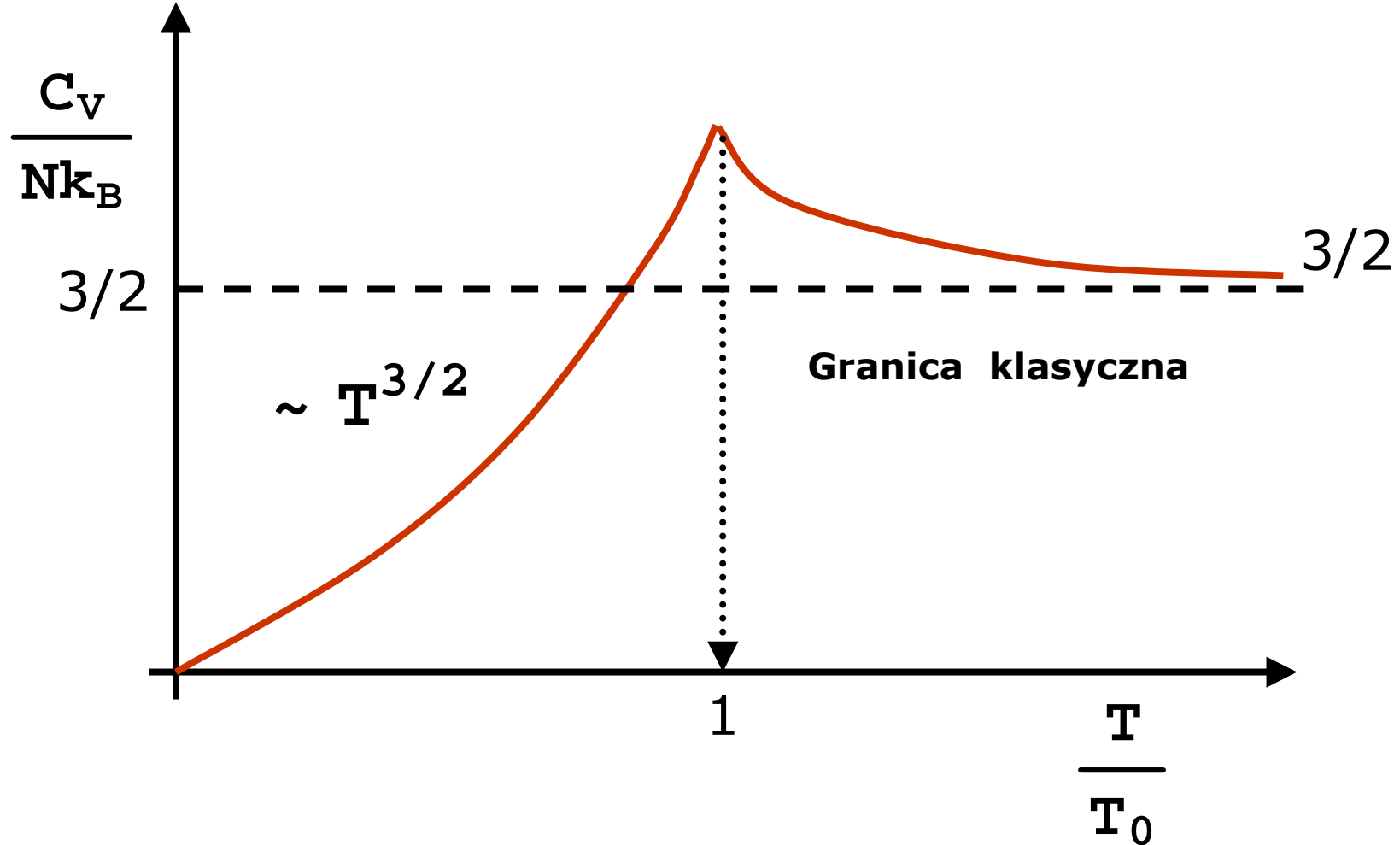
$$\left( \frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_{V, T \rightarrow T_0^-} = 2.89 \frac{Nk_B}{T_0} \quad (T < T_0)$$

$$\left( \frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_{V, T \rightarrow T_0^+} = -0.77 \frac{Nk_B}{T_0} \quad (T > T_0)$$

Zatem w cieple właściwym mamy ostrze  
w temperaturze  $T = T_0$



KBE – przewidziana była przez Einsteina w 1924, warunkiem istnienia kondensatu jest, aby temperaturo-  
wa długość fali de Brogli'a była porównywalna z odległościami międzyatomowymi

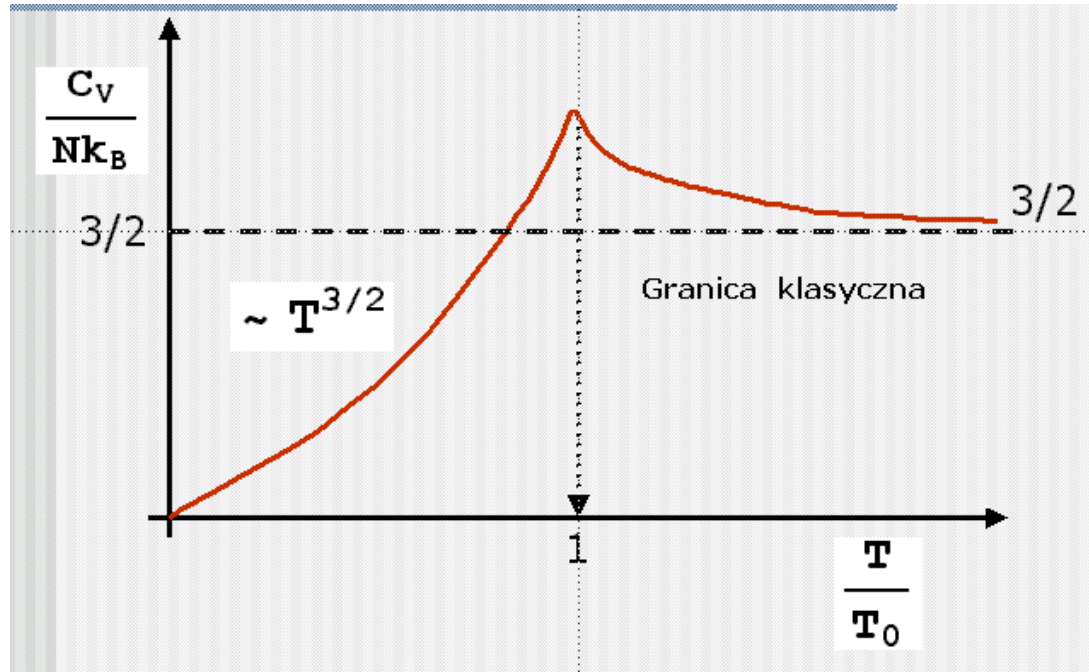


# Nadpłynność w ciekłym helu $^4\text{He}$ ma związek z KBE

- Dla  $T = 4.22\text{K}$   $^4\text{He}$  staje się cieczą
- Dla  $T_0 = 2.17$   $^4\text{He}$  staje się nadciekły
- London w 1938 zaproponował, że nadciekłość to KBE

Z modelu nieoddziaływujących bosonów  
 $T_0 = 3.15\text{ K}$

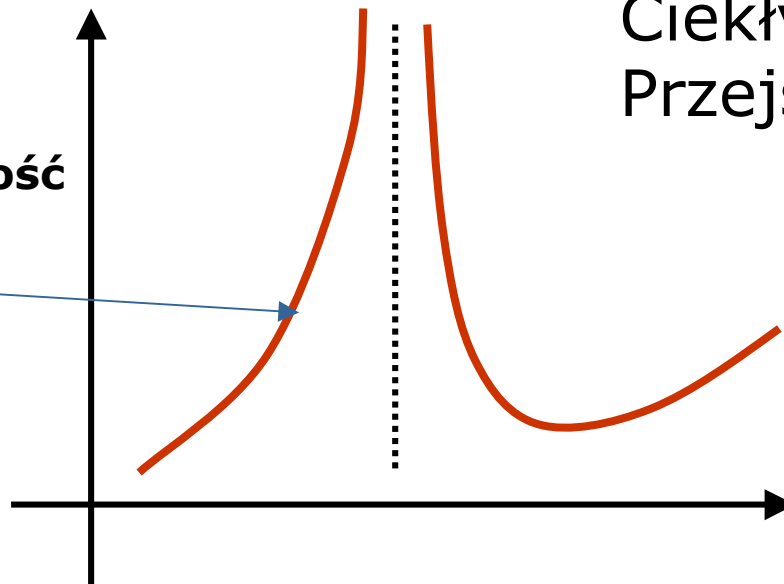
Stan nadciekły jest daleki od stanu nieoddz. bosonów, frakcja nadciekła nie dąży do 100%, a stabilizuje się wokół znacznie mniejszych wartości ( $\sim 10\%$ )



KBE

Ciekły hel:  
Przejście  $\lambda$

- Logarytmiczna rozbieżność
- Maleje jak  $T^3$



W 1995 dowiedziono istnienia KBE (E. Cornell, National Institute of Standards and Technology, Boulder, Colorado) dla ultrazimnego gazu atomów rubidu o małej gęstości, zamkniętych w atomowych pułapkach. Analogiczny eksperyment dla atomów Li wykonano w Houston (R. Hulet, Rice University, Houston, Texas)

$$M = 87 \text{ jm}$$

$$T_0 = 8.57 * 10^{-8}$$

$$\text{średnia odległość} = 4641.6 \text{ \AA}$$