

Zadanie 23 (Oscylator Duffinga)

Proszę użyć polecenia `NDSolve` do rozwiązania problemu początkowego dla oscylatora Duffinga danego równaniem

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t$$
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

z parametrami $(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega) = (1, -1, 0.2, 0.3, 1)$ oraz x_0 i v_0 dowolnymi dla czasów $t \in [0, T]$, $T = 1000$. Proszę narysować rozwiązanie w przestrzeni fazowej, t.j. narysować trajektorię $(x(t), \dot{x}(t))$. Proszę narysować w przestrzeni fazowej punkty dla czasów $t_n = 2n\pi$ dla naturalnych n , takich, że $t_n \leq T$. Można stopniowo zwiększać T , przy $T = 10000$ doskonale widoczny staje się atraktor, czyli podzbiór przestrzeni fazowej, do którego dąży rozwiązanie (proszę pamiętać, że zaczynaliśmy od dowolnych x_0 i v_0).

Podpowiedź: funkcja `{#,D[#,t]}` generuje parę $(x(t), \dot{x}(t))$.

Zadanie 24 (Oscylator Duffinga)

Oscylator Duffinga dla parametrów jak w zadaniu 23 jest układem chaotycznym. Proszę to sprawdzić rozwiązując równanie dla dowolnych danych początkowych (x_0, v_0) (zapiszmy rozwiązanie jako $X_0(t)$) oraz dla $(x_1, v_1) = (x_0 + \epsilon, v_0)$ (rozwiązanie $X_1(t)$), gdzie $\epsilon \approx 10^{-5}$. Następnie proszę narysować wykres logarytmu z różnicy obu rozwiązań czyli $\log(\sqrt{(X_0(t) - X_1(t))^2 + (\dot{X}_0(t) - \dot{X}_1(t))^2})$. Do obliczenia długości różnicy przydatna może okazać się funkcja `Norm`.

Zadanie 25* (Oscylator Duffinga 2)

Proszę użyć równania i parametrów z zadania 23 by wygenerować rozwiązania dla warunków początkowych (x_0, v_0) ze zbioru $[-3, 3] \times [-3, 3]$ (należy pokryć ten zbiór odpowiednią siatką, o rozdzielczości np. 20×20 lub większą) oraz maksymalnego czasu $T = 2\pi$. Proszę narysować zbiór rozwiązań w przestrzeni fazowej w czasach $t_i \in [0, 2\pi]$ (najlepiej użyć do tego `ListAnimate`). Należy pokolorować punkty w przestrzeni fazowej tak, by było możliwe rozpoznanie z jakimi warunkami początkowymi dane rozwiązanie jest związane (można użyć do tego opcji `PlotStyle` i gradientu kolorów zależnego np. od x_0).

Zadanie 26* (Oscylator Duffinga 3)

Z rozwiązania zadania 23 wynika, że dla zadanych parametrów modelu oscylatora Duffinga istnieje atraktor. Atraktor ten jest dynamiczny, t.j. jego kształt zależy od czasu, naturalnym jest przypuszczać, że ten atraktor ma taki sam

okres jak siła wymuszająca, czyli 2π . By to potwierdzić proszę narysować portret fazowy jak w zadaniu 25 dla czasów $t_n = 2n\pi + \phi$ gdzie ϕ ma zmieniać się od 0 do 2π w sposób ciągły (najlepiej użyć `ListAnimate`).

Pełny, trójwymiarowy obraz atraktora można uzyskać rysując poniższą krzywą

$$((x(t) + 3) \cos(\omega t), (x(t) + 3) \sin(\omega t), \dot{x}(t)). \quad (1)$$

Proszę pokolorować krzywą np. gradientem o `RGBColor[1,0,Sin[50z]]`