

Katenoida

Rozważmy bańkę mydlaną rozpiętą na dwóch współosiowych okręgach o równych promieniach $R_1 = R_2 = R$ oddległych od siebie o $2h$. Zjawisko napięcia powierzchniowego powoduje, że kształt bańki mydlanej dąży do stanu o jak najmniejszym polu powierzchni. Stan taki będzie charakteryzował się osiową symetrią względem wspólnej osi okręgów, stanem równowagi bańki mydlanej będzie więc powierzchnia o symetrii osiowej. Pole powierzchni bryły o symetrii osiowej o profilu zadanym funkcją $r = f(z)$ gdzie $z \in [-h, h]$ oraz $f(-h) = R$ i $f(h) = R$ (którą to powierzchnię będziemy dalej nazywać A) dane jest wzorem

$$S(f) = 2\pi \int_{-h}^h \sqrt{1 + f'(z)^2} f(z) dz. \quad (1)$$

Powierzchnię obrotową zadaną przez funkcję $f(z)$ można narysować używając funkcji `RevolutionPlot3D` (należy odpowiednio ustawić oś obrotu używając opcji `RevolutionAxis`).

Warunek konieczny na to, by A miała najmniejsze pole powierzchni jest równoważny spełnieniu przez f następującego równania różniczkowego

$$f''(z)f(z) - f'(z)^2 = 1. \quad (2)$$

Warunek ten można (ale nie trzeba!) wyprowadzić z wariacji pola powierzchni (1) korzystając z funkcji `EulerEquations` i odpowiednio upraszczając wynik.

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja $f_{c,z_0}(z) = \frac{1}{c} \cosh((z - z_0)/c)$, proszę sprawdzić to podstawiając f_{c,z_0} do (2) za pomocą instrukcji `->` lub `:>`. Powierzchnia obrotowa o profilu f_{c,z_0} nazywana jest katenoidą.

W naszym przypadku $z_0 = 0$ bo oba pierścienie rozłożone są symetrycznie względem $z = 0$ dalej więc przyjmujemy notację $f_c = f_{c,0}$. Korzystając z warunku $f_c(h) = R$ proszę wyprowadzić wzór na $h(c)$ (od tego miejsca, dla uproszczenia, proszę założyć $R = 1$) i narysować tę zależność (jaka jest dziedzina c ?). Czy dla każdego h , odpowiadającego rozsunięciu pierścieni, istnieje rozwiązanie (2) takie, że $f_c(h) = R$?

Proszę użyć funkcji `Manipulate` i `Plot` aby zobrazować jak zmienia się $f_c(z)$ w zależności od c . Proszę zawęzić wykres do obszaru $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ (opcja `PlotRegion`).

Używając funkcji `NMaximize` proszę znaleźć krytyczne wartości $h(c)$, czyli takiego $h_{\text{crit}} = h(c_{\text{crit}})$ dla którego istnieje tylko jeden profil bańki.

Proszę zaimplementować funkcje `c1[H]` i `c2[H]`, które dla zadanego $H < h_{\text{crit}}$ zwracają takie $c_1 < c_{\text{crit}} < c_2$ że $h(c_1) = h(c_2) = H$. Funkcje `c1[H]` powinna numerycznie rozwiązywać równanie $h(c) = H$ przy warunku $c < c_{\text{crit}}$ używając metody `FindRoot`. Proszę sprawdzić w pliku pomocy Mathematici jak zawęzić dziedzinę `FindRoot`.

Proszę narysować wykres pola powierzchni $S(f_c)$ w zależności od h (najłatwiej użyć do tego polecenia `ParametricPlot` pamiętając, że $h = h(c)$). Na tym samym wykresie proszę narysować sumę pól powierzchni odpowiadających dwóm kołom o promieniu $R = 1$ rozpiętych na pierścieniach.

Należy zaznaczyć, że spośród dwóch możliwych katenoid opisujących kształt bańki mydlanej tylko ta o mniejszym polu powierzchni (t.j. $c > c_{\text{crit}}$) jest stabilna. Katenoida dla $c < c_{\text{crit}}$ jest niestabilna, a konkretnie istnieje dokładnie jeden rodzaj zaburzenia jej profilu, który zmniejsza jej powierzchnię (jeden mod niestabilny).