ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ (DLA DOKTORANTÓW)

Zestaw VII - na 18.03.2005

1. Proszę dokończyć Zadania 3. i 4. z poprzedniego zestawu.

2. Udowodnić tożsamość
$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2+a^2} = \frac{e^{-ar}}{4\pi r},$$
a następnie policzyć funkcję korelacji $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \eta(\mathbf{r}_1)\eta(\mathbf{r}_2)\rangle$ dla fluktuacji gaussowskich, czyli dla funkcjonału energii swobodnej postaci:
$$\mathcal{F}_{\text{Gauss}} = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{a}{2}\eta^2 + \frac{c}{2}(\nabla\eta)^2\right].$$

3. Policzyć funkcję rozdziału i oszacować ciepła właściwego pochodzącego od fluktuacji gaussowskich w pobliżu temperatury krytycznej T_c. Przyjmując, że $a = a_0(T - T_c)$.

4. Przyjmując z definicję pochodnej funkcjonalnej
$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x_0)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[f(x) + \epsilon\delta(x - x_0)] - F[f(x)]}{\epsilon},$$
pokazać, jak wyglądać będą wyrażenia na pochodne $\dfrac{\delta f(x)}{\delta f(x_0)}$ i $\dfrac{\delta f'(x)}{\delta f(x_0)}$, wzór na **różniczkę zupełną** funkcjonału $F[f + \delta f]$, oraz **reguła łańcuchowa** dla $F = F[g \circ f]$.

5. Rozważyć warunek konieczny istnienia minimum funkcjonału Ginzburga–Landaua
$$\mathcal{F}_{\text{G-L}}[\eta] = \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{a}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4 - \eta h + \frac{c}{2}(\nabla\eta)^2\right)$$
i wyprowadzić odpowiednie równanie na parametr porządku $\eta(\mathbf{r})$. Korzystając z tożsamości dowiedzionej w Zadaniu 2. przedyskutować rozwiązania tego równania w przypadku Gaussowskim ($b = 0$).