ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ (DLA DOKTORANTÓW)

Zestaw V - na 14 i 17.01.2005

1. Model Isinga jest zdefiniowany hamiltonianem postaci

$$\mathcal{H} = \frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i,$$

gdzie $J < 0$ (przypadek *ferromagnetyczny*), $\sum_{\langle ij \rangle}$ oznacza sumowanie po parach najbliższych sąsiadów, B jest zewnętrznym polem magnetycznym, zaś $s_i = \pm 1$ są klasycznymi zmiennymi (*spinami Isinga*). Obliczyć sumę stanów i energię swobodną na węzeł dla $D = 1$ (*pierścień Isinga*) w granicy N. Pokazać, że dla w dowolnej temperaturze wartość średnia $\langle s \rangle \to 0$ gdy $B \to 0$, zatem układ jest *zawsze* paramagnetyczny.

2. Rozwiązać model Isinga w przybliżeniu średniego pola, dla zadanej liczby koordynacyjnej z (np. $z = 2D$ dla sieci hiperkubicznej) i omówić własności tego rozwiązania.

3. Pokazać bezpośrednim rachunkiem, że operatory spinowe w reprezentacji Holsteina–Primakoffa:

$$S_i^+ = \left(2S - a_i^\dagger a_i\right)^{1/2} a_i, \qquad S_i^- = \left(S_i^+\right)^\dagger, \qquad S_i^z = S - a_i^\dagger a_i$$

spełniają kanoniczne relacje komutacji:

$$\left[S_i^z, S_i^\pm\right] = \pm S_i^\pm, \qquad \left[S_i^+, S_i^-\right] = 2S_i^z.$$

O operatorach a_i, $a_i^\dagger$ zakładamy, że spełniają bozonowe relacje komutacji:

$$[a_i, a_j] = \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 0, \qquad \left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}.$$

4. Pokazać, że transformacja Bogoliubowa:

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_{\mathbf{k}} & \sinh\theta_{\mathbf{k}} \\ \sinh\theta_{\mathbf{k}} & \cosh\theta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}} \\ \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}$$

zachowuje relacje komutacji dla operatorów bozonowych $a_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}$, o ile operatory $\alpha_{\mathbf{k}}$, $\beta_{\mathbf{k}}$ je spełniają. Jak będzie wyglądać analogiczna transformacja dla operatorów fermionowych? Zastanowić się również, jakie znaczenie *fizyczne* ma fakt, że $\det B = 1$, gdzie B jest macierzą definiującą transformacje Bogoliubowa.

5. Wykorzystując zdefiniowane powyżej transformacje, rozwiązać model Heisenberga

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

w przypadku antyferromagnetycznym ($J > 0$) w przybliżeniu harmonicznym. *Wskazówka:* reprezentację Holsteina-Primakoffa należy wprowadzić niezależnie dla poszczególnych podsieci.