ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ
(DLA DOKTORANTÓW)

Zestaw IV - na 19.11.2004

1. Wyprowadzić rozkłady Fermiego–Diraca i Bosego–Einsteina

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}-\mu}{k_B T}} \pm 1},$$

   gdzie górny (dolny) znak dotyczy fermionów (bozonów), metodą kombinatoryczną.

2. Pokazać, że w niskich temperaturach:

   a) ciepło właściwe doskonałego gazu Fermiego $c_V = \gamma T$,
   b) ciepło właściwe doskonałego gazu Bosego $c_V = AT^3$,
   c) podatność spinowa (Pauliego) gazu swobodnych elektronów $\chi_P = \frac{1}{2} g \mu_B^2 \rho(\epsilon_F)$, gdzie $\rho(\epsilon_F) = 3N/2\epsilon_F$ jest gęstością stanów na poziomie Fermiego.

   Niezbędne wskazówki do rozwiązania tego zdania można znaleźć w podręczniku C. Kittela *Wstęp do fizyki ciała stałego*.

3. Korzystając z postaci hamiltonianu wyprowadzonej w Zadaniu 1. z poprzedniego zestawu oszacować średni kwadrat amplitudy drgań $\langle x_l^2 \rangle$ w stanie podstawowym (*drgań zerowych*) w jednowymiarowym układzie N identycznych mas M, połączonych sprężynami o stałej sprężystości K. Oszacować zachowanie asymptotyczne $\langle x_l^2 \rangle$ dla dużych N. Jak zmieni się analizowane wyrażenie, jeśli każda z mas zostanie dodatkowo przytwierdzona do swojego położenia równowagi sprężyna o stałej sprężystości K'?

4. Proszę wyprowadzić wzór na powierzchnię sfery o promieniu $R = 1$ w przestrzeni N–wymiarowej (czyli *sfery* $N-1$ *wymiarowej*):

$$V\left(\mathcal{S}^{N-1}\right) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2})}.$$

5. Oszacować średni kwadrat amplitudy drgań zerowych w D–wymiarowej sieci hiperkubicznej dla $T > 0$. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym analizowanym poprzednio, przyjmujemy identyczne masy i stałe sprężystości (*sieć monoatomowa*). Ponadto zakładamy, że liczba fononów w poszczególnych modach normalnych o energiach $\epsilon_{\mathbf{k}}$ dana jest rozkładem Bosego–Einsteina. Znaleźć taki wymiar krytyczny D_C, że dla $D \geqslant D_C$ wyrażenie na $\langle x_l^2 \rangle$ jest zbieżne w granicy $N \to \infty$.