

**ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ  
(DLA DOKTORANTÓW)**

**Zestaw III - na 18.10.2004**

1. Wykazać, że operatory

$$a = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} (m\omega x + ip^\dagger)$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} (m\omega x^\dagger - ip)$$

spełniają bozonowe relacje komutacji i ile  $[x, p] = i\hbar$ . Następnie zapisać Hamiltonian oscylatora harmonicznego w reprezentacji II kwantowania.

2. W ramach metody transformacji kanonicznych przekształcamy hamiltonian układu oddziałującego postaci  $H = H_0 + H_1$  za pomocą transformacji

$$H' = e^{-S} H e^S. \quad (1)$$

- a) Wykazać, że takie przekształcenie nie zmienia wartości własnych hamiltonianu. Podać również, jak zmieniają się jego wektory własne.

- b) Rozwinąć wyrażenie na  $H'$  w szereg potęgowy względem  $S$ :

$$H' = H + [H, S] + \frac{1}{2}[[H, S], S] + \dots \quad (2)$$

*Wskazówka:* Rozważyć pomocniczo transformację zależną od parametru rzeczywistego  $\tau$ :

$$H(\tau) = e^{-\tau S} H e^{\tau S},$$

obliczyć  $n$ -tą pochodną względem  $\tau$  a następnie wypisać szereg Taylora dla  $H(\tau)$ .

3. Znaleźć wektory własne i wartości własne Hamiltonianu opisującego oddziaływanie elektron–fonon dla pojedynczego atomu umieszczonego w zewnętrznym potencjale:

$$\mathcal{H} = \epsilon_d n_d + U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow} - \lambda(n_d - 1)(a^\dagger + a) + \omega_0 a^\dagger a.$$

Następnie wprowadzić wyraz z potencjałem chemicznym  $-\mu n_d$  i przedyskutować zależność liczby elektronów w stanie podstawowym od  $\mu$  i parametrów modelu.

*Wskazówka:* Łatwo zauważyć, że hamiltonian komutuje z operatorem liczby elektronów  $n_d$ , zatem diagonalizacją można przeprowadzić niezależnie w podprzestrzeniach numerowanych wartościami  $n_d = 0, 1, 2$ . Przypadek  $n_d = 1$  jest najprostszy, gdyż znika wtedy wyraz oddziaływania elektron–fonon. Dla  $n_d = 0$  rozważyć transformację kanoniczną (1) o generatorze

$$S = -\frac{\lambda}{\omega_0}(a^\dagger - a)$$

i sprawdzić, że rozwinięcie (2) da się wykonać ściśle (znikają wyrazy zawierające 3 i więcej komutatorów). Przypadek  $n_d = 2$  jest analogiczny.