

ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ (DLA DOKTORANTÓW)

Zestaw I - na 4.10.2004

1. Korzystając z reguł (anty)komutacji dla operatorów kreacji i anihilacji

$$[a_i, a_k]_{\pm} = [a_i^{\dagger}, a_k^{\dagger}]_{\pm} = 0, \quad [a_i, a_k^{\dagger}]_{\pm} = \delta_{ik},$$

gdzie dolne (górne) znaki dotyczą bozonów (fermionów) wyprowadzić analogiczne reguły dla operatorów pola $\Psi^{\dagger}(\mathbf{r})$ i $\Psi(\mathbf{r})$.

2. Zapisać wyrażenie na energię kinetyczną $\hat{T} = \sum_{ij} t_{ij} c_i^{\dagger} c_j$, gdzie

$$t_{ij} \equiv \langle \psi_i | T | \psi_j \rangle = \int d^3\mathbf{r} \psi_i^*(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}),$$

oraz Hamiltonian oddziaływania $\hat{V} = \sum_{ijkl} V_{ijkl} c_i^{\dagger} c_j^{\dagger} c_k c_l$, gdzie

$$V_{ijkl} \equiv \langle \psi_i \psi_j | V | \psi_k \psi_l \rangle = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_j^*(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_k(\mathbf{r}_2) \psi_l(\mathbf{r}_1),$$

za pomocą operatorów pola. Uogólnić otrzymane wyrażenia na dowolne operatory jedno- i dwucząstkowe w reprezentacji liczb obsadzeń.

3. Przy pomocy wyrażeń wyprowadzonych w Zadaniu 2 zapisać operator liczby cząstek \hat{N} oraz operatory spinowe $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ w formalizmie drugiego kwantowania (w drugim przypadku należy wprowadzić operatory pola zależne od spinu).