

ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ
(DLA DOKTORANTÓW)

Zestaw IX - na 12.03.2004

1. Oszacować średni kwadrat amplitudy drgań zerowych w D -wymiarowej sieci hiperkubicznej dla $T > 0$. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym analizowanym poprzednio, przyjmujemy identyczne masy i stałe sprężystości (*sieć monoatomowa*). Ponadto zakładamy, że liczba fononów w poszczególnych modach normalnych o energiach $E_{\mathbf{k}}$ dana jest rozkładem Bosego–Einsteina:

$$\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1}.$$

Znaleźć taki wymiar krytyczny D_C , że dla $D \geq D_C$ wyrażenie na $\langle x_i^2 \rangle$ jest zbieżne w granicy $N \rightarrow \infty$.

2. Wykonać transformację kanoniczną $H' = e^{-S} H e^S$ dla atomowego modelu Holsteina

$$H_a = \sum_i \left\{ \epsilon n_i + \mathcal{M} n_i (a_i^\dagger + a_i) + \omega a_i^\dagger a_i \right\},$$

gdzie $n_i = n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow}$, zaś generator transformacji

$$S = - \sum_{i\sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} \frac{\mathcal{M}}{\omega} (a_i^\dagger - a_i).$$

Pokazać, że efektywna energia atomowa (po transformacji) wyniesie $\epsilon - \frac{\mathcal{M}^2}{\omega}$ a ponadto pojawi się lokalne oddziaływanie przyciągające elektronów:

$$-2 \frac{\mathcal{M}^2}{\omega} n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}.$$

Sprawdzić również, jak transformuje się wyraz kinetyczny postaci

$$H_t = -t \sum_{\langle ij \rangle \sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma}$$

i wyprowadzić efektywną całkę przeskoku poprzez wyśredniowanie wyniku po stanie próżni fononowej.