Zadania z Podstaw Kwantowej Teorii Wielu Ciał
(dla doktorantów)

Zestaw VIII - na 20.02.2004

1. Dokończyć Zadanie 3. z poprzedniego zestawu. W pkt. a) należy wykazać, że

$$\Delta(T) \sim \Delta(0) \left(1 - \frac{T}{T_S}\right)^{1/2} \qquad \text{dla } T \to T_S,$$

gdzie współczynnik proporcjonalności jest stały w granicy $V\rho(0) \ll 1$.

2. Wykazać, że operatory

$$a_q = \sqrt{\frac{1}{2M\hbar\omega_q}} \left(M\omega_q x_q + i p_q^\dagger\right)$$

$$a_q^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2M\hbar\omega_q}} \left(M\omega_q x_q^\dagger - i p_q\right)$$

spełniają bozonowe relacje komutacji $[a_q, a_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'}$. W tym celu przyjąć, że komutator $[x_q, p_{q'}] = i\hbar\delta_{qq'}$.

3. Obliczyć średni kwadrat amplitudy drgań $\langle x_l^2 \rangle$ w stanie podstawowym (*drgań zerowych*) w jednowymiarowym układzie N identycznych mas M, połączonych sprężynami o stałej sprężystości K. Oszacować zachowanie asymptotyczne $\langle x_l^2 \rangle$ dla dużych N. Jak zmieni się analizowane wyrażenie, jeśli każda z mas zostanie dodatkowo przytwierdzona do swojego położenia równowagi sprężyna o stałej sprężystości K'?

4. W ramach metody transformacji kanonicznych przekształcamy hamiltonian układu oddziałującego postaci $H = H_0 + H_1$ za pomocą transformacji

$$H' = e^{-S} H e^{S}.$$

   a) Wykazać, że takie przekształcenie nie zmienia wartości własnych hamiltonianu. Podać również, jak zmienią się jego wektory własne.

   b) Rozwinąć wyrażenie na H' w szereg względem S.

   c) Założyć, że transformacja jest tak dobrana, aby $H_1 + [H_0, S] = 0$ (zatem S jest rzędu $\sim H_1$) i wyrazić H' z dokładnością do wyrazów rzędu $\sim S^2$.