ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ
(DLA DOKTORANTÓW)

Zestaw VI - na 19.12.2003

1. Obliczyć wariacyjnie energię wiązania pary Coopera w formaliźmie II kwantowania. W tym celu rozważyć hamiltonian

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow},$$

   gdzie potencjał parujący przyjęto w postaci:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V\theta(\hbar\omega_D - |\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F|)\theta(\hbar\omega_D - |\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_F|),$$

   ($V > 0$, ω_D - częstość Debye'a drgań sieci).

2. Zdiagonalizować hamiltonian efektywny BCS

$$\mathcal{H}_{\rm BCS} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\Delta_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} + \Delta^{*}_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \right) - \frac{|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}{V} \right],$$

   gdzie

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left\langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \right\rangle = -V \sum_{\mathbf{k}'} \left\langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \right\rangle .$$

   Skorzystać z zapisu dwukomponentowego (notacja Nambu–Boguliubowa–...), wyliczyć jawnie wektory własne i wartości własne.

3. Pokazać, że transformacja Bogoliubowa

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}\uparrow} \\ a^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_{\mathbf{k}} & \sin\vartheta_{\mathbf{k}} \\ -\sin\vartheta_{\mathbf{k}} & \cos\vartheta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \alpha^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix}$$

   zachowuje relacje komutacji dla operatorów fermionowych $a_{\mathbf{k}\sigma}$, o ile operatory $\alpha_{\mathbf{k}\sigma}$ je spełniają. Jak będzie wyglądać analogiczna transformacja dla operatorów bozonowych? Zastanowić się również, jakie znaczenie *fizyczne* ma fakt, że $\det B = 1$, gdzie B jest macierzą definiującą transformacje Bogoliubowa.

4. Zastosować metodę Bogoliubowa do diagonalizacji hamiltonianu BCS (można założyć, że $\Delta^{*}_{\mathbf{k}} = \Delta_{\mathbf{k}}$) i zapisać $\Delta_{\mathbf{k}}$ za pomocą kątów mieszania $\vartheta_{\mathbf{k}}$. Wyprowadzić także równania samozgodne na $\Delta_{\mathbf{k}}$ i podać rozwiązanie dla przypadku izotropowego $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta$, w granicy $V\mathcal{N}(\epsilon_F) \ll 1$.